25. Berliner Tag der Mathematik 2022

Aufgaben & Lösungen

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 1

(Aufgabe (a) : 6 Punkte,
(b) : 4 Punkte)

Louise untersucht den Inhalt ihres Portemonnaies: „Das ist ja witzig“, sagt sie zu ihrer Freundin Fabienne, „ich habe genau fünf Münzen. Es sind 1-, 2- und 5-Cent-Münzen aus allen drei Benelux-Ländern mit drei verschiedenen Prägejahren.“

„Wie geht das denn? Du hast doch nur fünf Münzen“, erwidert Fabienne.

Louise erklärt: „Na ja, die Münzen haben halt mehrere Eigenschaften gleichzeitig. Pass auf, ich gebe dir ein paar Hinweise:

(1) Es gibt genauso viele Münzen aus Belgien wie aus den Niederlanden.

(2) Es gibt mehr 2013 geprägte Münzen als Münzen aus Luxemburg.

(3) Es gibt genauso viele 1-Cent-Münzen wie 2015 geprägte Münzen.

(4) Es gibt keine 2019 geprägte 5-Cent-Münze aus Belgien.

(5) Die 5-Cent-Münzen wurden nicht alle im gleichen Jahr geprägt.

(6) Keine 5-Cent-Münze wurde 2013 geprägt.

(7) Kein Land ist mehr als zweimal vertreten.

(8) Die 1-Cent-Münzen kommen aus zwei verschiedenen Ländern.

(9) Die 5-Cent-Münzen kommen alle aus demselben Land.

(10) Alle Münzen aus dem Jahr 2013 haben denselben Wert.“

Fabienne überlegt, welche Münzen Louise in ihrem Portemonnaie hat.

(a) Beantwortet die folgenden Fragen. Begründet dabei jeweils, dass eure Antwort richtig ist und es keine weitere Möglichkeit geben kann.

  (i) Wie viele 1-, 2- und 5-Cent-Münzen befinden sich jeweils in Louises Portemonnaie?

  (ii) Wie viele der Münzen in Louises Portemonnaie wurden jeweils in den Jahren 2013, 2015 und 2019 geprägt?

  (iii) Wie viele der Münzen kommen jeweils aus Belgien, den Niederlanden und Luxemburg?

(b) Gebt den genauen Inhalt von Louises Portemonnaie an, indem ihr Wert, Herkunftsland und Prägejahr von jeder der fünf Münzen nennt. Begründet, dass eure Lösung richtig ist und es keine weitere Lösung geben kann.

Benutzt für die Lösung bitte die Rückseite und das folgende Blatt.

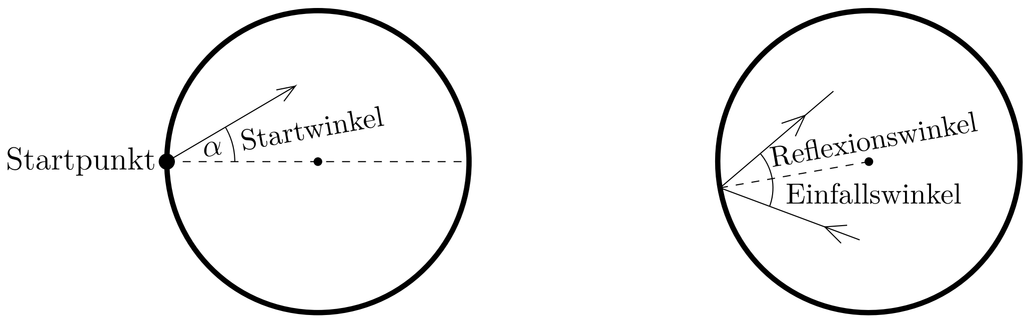
Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

(Aufgabe (a) : 2 Punkte,
(b) : 2 Punkte,
(c) : 3 Punkte,
(d) : 2 Punkte,
(e) : 1 Punkt)

Aufgabe 2: Billard im Kreis

König Alfons der Viertel-vor-Zwölfte legt Wert darauf, sich als König von seinen drei-einhalb Untertanen abzuheben. Deswegen ist sein Billardtisch nicht rechteckig sondern kreisförmig. Er versucht auch nicht, die Kugeln in Löcher zu befördern – diese gibt es auch gar nicht bei seinem Billardtisch. Nein, König Alfons versucht, eine Kugel, die am Rand liegt, mit genug Schwung so anzustoßen, dass sie die Bande in einigen Punkten berührt und schließlich wieder die Startposition am Rand trifft.

Bei einer Bandenberührung wird die Kugel wie an einem Spiegel reflektiert. Dabei ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel, siehe Bild. Die Größe des Startwinkels sei α.



(a) Begründet, dass die Kugel wieder zum Startpunkt zurückkehrt, wenn König Alfons $\alpha = 30°$ wählt.

(b) Welchen Weg wird die Kugel nehmen, wenn $\alpha = 15°$ beträgt? Fertigt eine saubere Skizze der Kugelbahn an. Diese soll enden, wenn die Kugel das erste Mal wieder an den Startpunkt am Rand gelangt.

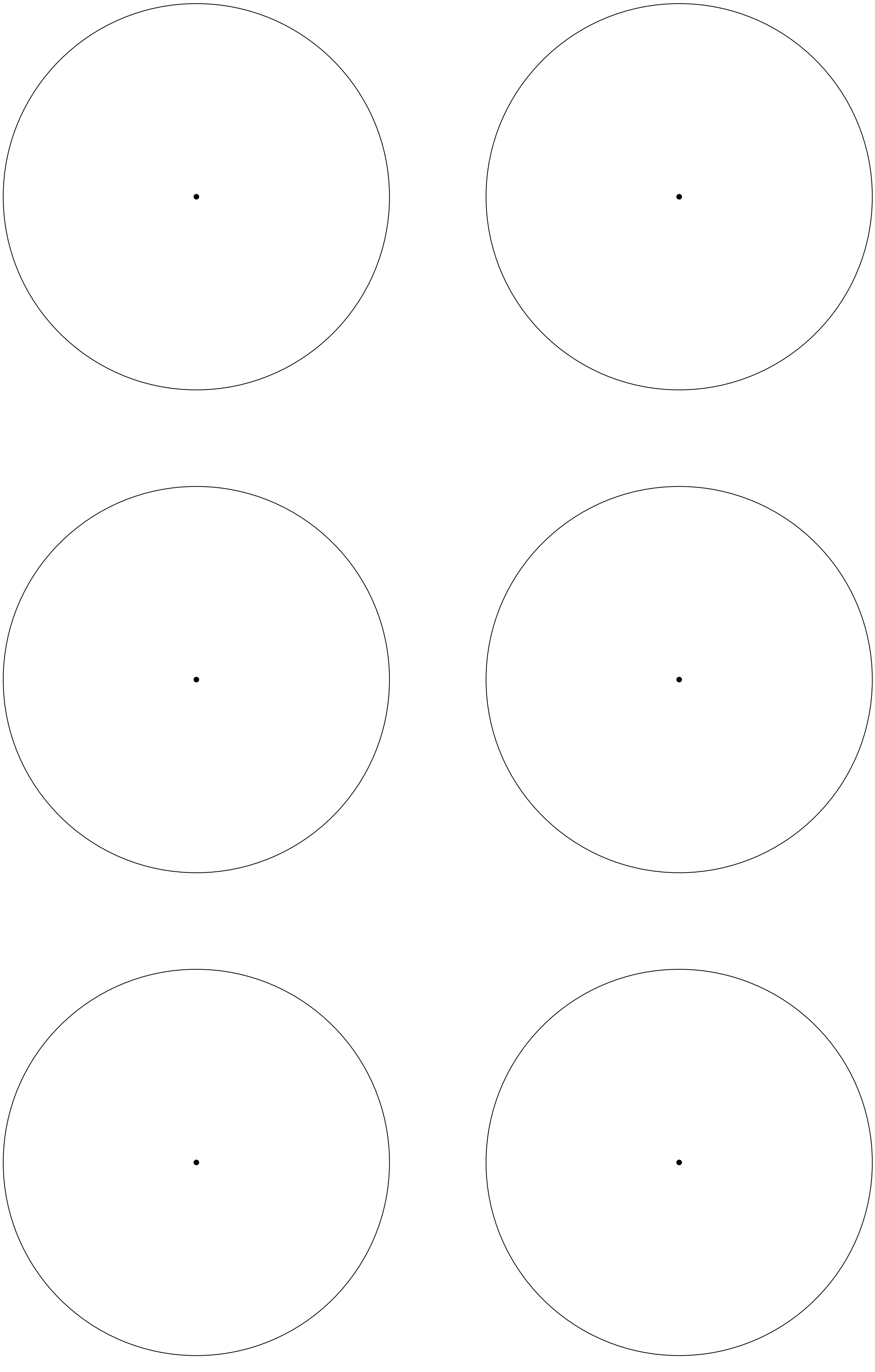
(c) Gebt eine Größe des Startwinkels $\alpha > 30°$ an, mit der König Alfons Erfolg haben wird. Begründet eure Antwort.

(d) Der König hat inzwischen sehr viel geübt und schafft es nun immer, dass die Kugel zu ihrem Startpunkt zurückkehrt. Er fordert siegessicher Herrn Ärmel zu einem Spiel heraus. Sie dürfen nacheinander jeder einmal die Kugel anstoßen und zählen die Punkte, in denen die Kugel die Bande berührt bevor sie zum ersten Mal zu ihrem Startpunkt zurückkehrt. Wer mehr Bandenberührungen hat, gewinnt. Da der König aber nicht gern verliert, besteht er darauf, dass Herr Ärmel beginnt. Beschreibt eine mögliche Gewinnstrategie des Königs.

(e) Jim Knopf flüstert Herrn Ärmel einen Trick ins Ohr. Und tatsächlich, durch den Trick von Jim kann der König wirklich nie gewinnen. Was könnte Jim Herrn Ärmel geraten haben?

Benutzt für die Lösung bitte die Rückseite und das folgende Blatt.

Benutzt dieses Blatt, um Skizzen anzufertigen. Gebt klar erkennbar an, welche der Skizzen als Lösung von Aufgabe (b) gewertet werden soll.



Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 3: Stammbrüche

(Aufgabe (a) : 3 Punkte,
(b) : 4 Punkte,
(c) : 3 Punkte)

Brüche der Form $\frac{1}{n}$, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine beliebige natürliche Zahl bezeichnet, werden *Stammbrüche* genannt. Zwei Stammbrüche, deren Nenner sich um 1 unterscheiden, wollen wir *benachbart* nennen. Zum Beispiel sind $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$ benachbarte Stammbrüche.

(a) Ermittelt alle diejenigen Bruchzahlen zwischen $\frac{1}{3}$ und 1, die sich als Summe zweier benachbarter Stammbrüche schreiben lassen.
Begründet, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

(b) Untersucht für jede der vier Bruchzahlen $\frac{31}{273}$, $\frac{39}{380}$, $\frac{52}{463}$ und $\frac{107}{2862}$, ob sie sich als Summe zweier benachbarter Stammbrüche schreiben lässt.
Gebt eine Möglichkeit dafür an oder begründet, *warum* es *nicht* möglich ist.

(c) Max erklärt Moritz, wie er die Summe zweier benachbarter Stammbrüche berechnet:

„Ich erweitere den ersten Stammbruch mit dem Nenner des zweiten und den zweiten Stammbruch mit dem Nenner des ersten. Die Zähler der beiden so entstandenen Brüche addiere ich; das ergibt den Zähler des Ergebnisses. Als Nenner des Ergebnisses nehme ich den gemeinsamen Nenner der beiden eben durch Erweitern erhaltenen Brüche.“

Moritz stellt fest:

„Wenn man so rechnet, ergibt sich stets ein unkürzbarer Bruch, gleichgültig, welche beiden benachbarten Stammbrüche man addiert hat.“

Beweist, dass diese Feststellung wahr ist.

Platz für die Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

(Aufgabe (a) : 2 Punkte,
(b) : 3 Punkte,
(c) : 2 Punkte,
(d) : 3 Punkte)

Aufgabe 4: Mehr Münzen

Leonie spielt mit einigen Münzen, von denen jede Kopf (K) oder Zahl (Z) zeigen kann. Das Spiel geht so: Sie wählt eine feste Anzahl Münzen aus und legt diese in einer beliebigen Anordnung von Kopf und Zahl in eine Reihe. Das Spiel ist gewonnen, wenn sie es schafft, die Münzen so umzudrehen, dass sie alle „Kopf“ zeigen. Dabei ist die folgende Spielregel zu beachten: Immer, wenn sie eine Münze zum Umdrehen auswählt, muss sie im selben Zug auch ihre Nachbarn umdrehen. Hat Leonie also eine „Randmünze“ ausgewählt, dreht sie in einem Zug zwei Münzen um, sonst immer drei. Das kann zum Beispiel so aussehen (die unterstrichene Münze ist jeweils die von Leonie gewählte):

$$KZ\underline{K}KZK \rightarrow KKZZZ\underline{K} \rightarrow KKZZ\underline{K}Z \rightarrow KKZKZK \rightarrow \ldots$$

(a) Leonie spielt mit sieben Münzen in der Startsituation

$$KZZKKZZ.$$

Kann sie das Spiel gewinnen? Wenn ja, gebt wie oben eine mögliche Zugfolge an; wenn nein, begründet, warum das nicht geht.

(b) Leonie spielt jetzt mit fünf Münzen. Nach einiger Zeit beschleicht sie das Gefühl, dass es hier Startsituationen gibt, für die man nach den gegebenen Spielregeln nie die Anordnung $KKKKK$ erreichen kann. Findet eine solche Startsituation und begründet, warum man mit dieser nicht gewinnen kann.

(c) Leonie hat sich überlegt: Wenn man für eine feste Anzahl Münzen mit der Startsituation $ZKKK\ldots K$ gewinnen kann, so kann man mit *jeder* Startsituation gewinnen. Hat sie Recht? Begründet eure Antwort.

(d) Für manche Anzahlen von Münzen (zum Beispiel sieben) lässt sich das Spiel immer, das heißt unabhängig von der Startsituation, gewinnen; bei anderen (zum Beispiel zwei) geht das nicht immer. Formuliert und beweist, für welche Anzahlen man das Spiel immer gewinnen kann – und für welche nicht.

Platz für die Lösung:

(a) (i) Weil die 1-Cent-Münzen aus zwei verschiedenen Ländern kommen **(8)**, muss es mindestens zwei 1-Cent-Münzen geben. Und weil die 5-Cent-Münzen nicht alle im gleichen Jahr geprägt wurden **(5)**, muss es auch mindestens zwei 5-Cent-Münzen geben. Es kann aber auch nicht *mehr* als zwei 1-Cent- oder 5-Cent-Münzen geben, weil unter den fünf Münzen auch mindestens eine 2-Cent-Münze sein muss.

Also befinden sich genau zwei 1-Cent-, eine 2-Cent- und zwei 5-Cent-Münzen in Louises Portemonnaie.

(ii) Da es genauso viele 1-Cent-Münzen wie 2015 geprägte Münzen gibt **(3)** und es zwei 1-Cent-Münzen gibt, muss es auch genau zwei 2015 geprägte Münzen geben. Da es außerdem mehr 2013 geprägte Münzen als Münzen aus Luxemburg gibt **(2)** und es mindestens eine Münze aus Luxemburg gibt, müssen mindestens zwei Münzen 2013 geprägt worden sein. Es können aber auch nicht *mehr* als zwei Münzen 2013 geprägt worden sein, da unter den fünf Münzen auch mindestens eine 2019 geprägt wurde.

Also wurden genau zwei Münzen 2013, zwei Münzen 2015 und eine Münze 2019 geprägt.

(iii) Weil kein Land mehr als zweimal vertreten ist **(7)**, müssen aus zwei Ländern je zwei Münzen kommen, während aus dem dritten Land nur eine Münze kommt. Weil es dabei genauso viele Münzen aus Belgien wie aus den Niederlanden gibt **(1)**, kommen aus diesen beiden Ländern je zwei Münzen und aus Luxemburg nur eine. (*Alternative:* Nur eine Münze stammt aus Luxemburg, weil es weniger Münzen aus Luxemburg als 2013 geprägte Münzen gibt **(2)**.)

Es kommen also zwei Münzen aus Belgien, zwei Münzen aus den Niederlanden und eine Münze aus Luxemburg.

(b) Die 5-Cent-Münzen wurden in verschiedenen Jahren geprägt **(5)** und *keine* 5-Cent-Münze wurde 2013 geprägt **(6)**. Also müssen die zwei 5-Cent-Münzen in den Jahren 2015 und 2019 geprägt worden sein. Außerdem kommen die beiden 5-Cent-Münzen aus demselben Land **(9)**. Weil aus Luxemburg nur eine Münze kommt, müssen sie aus einem der anderen Länder kommen. Da es aber keine 2019 geprägte 5-Cent-Münze aus Belgien gibt **(4)**, kommen die beiden 5-Cent-Münzen aus den Niederlanden. Es gibt also zwei niederländische 5-Cent-Münzen: eine aus dem Jahr 2015 und eine aus dem Jahr 2019.

Alle (zwei) 2013 geprägten Münzen haben denselben Wert **(10)**. Weil es aber nur eine 2-Cent-Münze gibt, müssen die beiden Münzen aus dem Jahr 2013 die beiden 1-Cent-Münzen sein. Da diese beiden 1-Cent-Münzen aus verschiedenen Ländern kommen **(8)** (und die beiden niederländischen Münzen schon als 5-Cent-Münzen identifiziert sind), müssen die 1-Cent-Münzen aus Belgien und Luxemburg kommen. Es gibt also zwei 1-Cent-Münzen, die beide 2013 geprägt wurden: eine aus Belgien und eine aus Luxemburg.

Damit ist die fünfte Münze eine 2015 geprägte 2-Cent-Münze aus Belgien.

Insgesamt sind also die folgenden Münzen in Louises Portemonnaie:

1 Cent
2013
Belgien

1 Cent
2013
Luxemburg

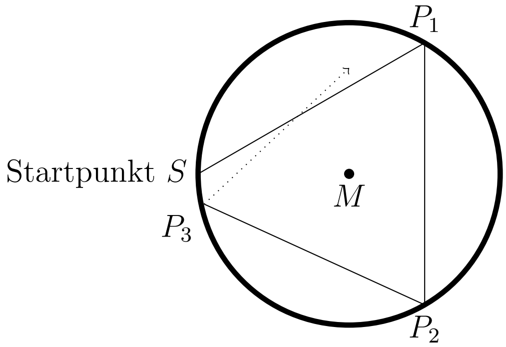
2 Cent
2015
Belgien

5 Cent
2015
Niederlande

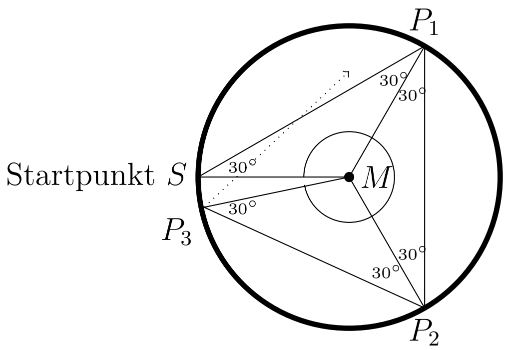
5 Cent
2019
Niederlande

(a) Wir nennen den Startpunkt S und die Punkte, an denen die Bande berührt wird, der Reihe nach P_1, P_2, ... Der Mittelpunkt des Kreises sei M.

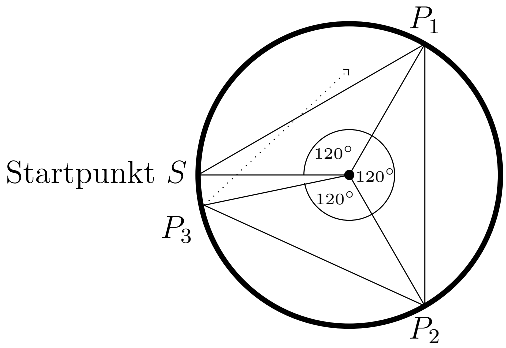
Wir zeigen, dass die Kugel bei der dritten Bandenberührung wieder in S ankommt, also $P_3 = S$ gilt. Da wir noch nicht sicher sind, dass $P_3 = S$ gilt, zeichnen wir zunächst eine Skizze mit $P_3 \neq S$.



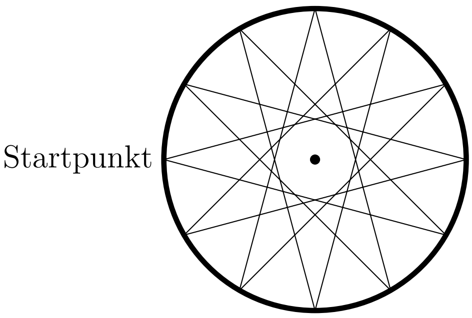
Das Dreieck ΔSMP_1 ist gleichschenklig, da $\overline{MS}$ und $\overline{MP_1}$ Radien des Kreises sind. Nach dem Basiswinkelsatz ist also der Einfallswinkel der ersten Reflexion ebenfalls 30° groß. Damit sind auch der erste Reflexionswinkel und analog der zweite Einfallswinkel und der zweite Reflexionswinkel jeweils 30° groß.



In den Dreiecken ΔSMP_1, ΔP_1MP_2 und ΔP_2MP_3 sind mit dem Innenwinkelsummensatz die Zentriwinkel $\measuredangle SMP_1$, $\measuredangle P_1MP_2$ bzw. $\measuredangle P_2MP_3$ jeweils 120° groß.
Damit ist $|\measuredangle SMP_3| = 3 \cdot 120° = 360°$. Damit muss $P_3 = S$ gelten. Die Kugel trifft also wieder beim Startpunkt ein.



(b) Es gibt 12 Bandenberührungen.



(c) Wenn der Startpunkt wieder S und der Punkt der ersten Bandenberührung P_1 ist, dann muss das Maß des Zentriwinkels $\measuredangle SMP_1$, wobei $|\measuredangle SMP_1| = 180° - 2\alpha$, bei Multiplikation mit einer geeigneten natürlichen Zahl n ein Vielfaches von 360° ergeben.

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, den Startwinkel zu wählen. Genannt werden können z.B.

Zentriwinkel $180° - 2\alpha$	Vielfaches von $360°$	Startwinkel α
$60°$	$6 \cdot 60° = 360°$	$60°$
$12°$	$30 \cdot 12° = 360°$	$84°$
$80°$	$9 \cdot 80° = 2 \cdot 360°$	$50°$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(d) Der König könnte versuchen, die Kugel entlang eines regulären n-Ecks rollen zu lassen, wobei n eine natürliche Zahl größer als die Anzahl der Bandenberührungen von Herrn Ärmels Kugel ist. Dieses n-Eck hat eine Innenwinkelsumme von $(n-2) \cdot 180°$. Folglich muss der Startwinkel $\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ groß sein, damit die Kugel entlang des n-Ecks rollt. Alternativ ist der Zentriwinkel eines jeden Dreiecks $\Delta P_i M P_{i+1}$ $\frac{360°}{n}$ groß und damit muss der Startwinkel $\frac{1}{2} \cdot \left(180° - \frac{360°}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot 180° - 360°}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{180° \cdot (n-2)}{n}$ groß sein.

(e) Wenn Herr Ärmel als Startwinkel $90°$ wählt, rollt die Kugel im Kreis direkt an der Bande entlang. Es gibt also unendlich viele Berührungspunkte mit der Bande, bevor die Kugel zum Startpunkt zurückkehrt. Damit kann der König nicht mehr gewinnen.

(a) Zwischen $\frac{1}{3}$ und 1 liegen

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\qquad \frac{7}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\qquad \frac{9}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\quad\text{und}\quad \frac{11}{30}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}.$$

Alle anderen Summen zweier benachbarter Stammbrüche sind entweder größer als 1 (da $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>1$) oder kleiner als $\frac{1}{3}$ (da $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{13}{42}<\frac{1}{3}$).

(b) Es ist $\dfrac{39}{380}=\dfrac{1}{19}+\dfrac{1}{20}$ und $\dfrac{107}{2862}=\dfrac{1}{53}+\dfrac{1}{54}$.

Keiner der Brüche $\dfrac{31}{273}$ und $\dfrac{52}{463}$ lässt sich als Summe zweier benachbarter Stammbrüche darstellen.

Begründung – Variante 1:

Der Zähler einer Bruchzahl, die sich als Summe zweier benachbarter Stammbrüche ergibt, ist die Summe zweier benachbarter natürlicher Zahlen. Diese ist ungerade, da ein Summand gerade und ein Summand ungerade sein muss. Der Nenner ist das Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl, also gerade. Der Faktor 2 kann also auch nicht gekürzt werden. Daher muss in der Summe zweier Stammbrüche der Nenner stets eine gerade Zahl sein.

Begründung – Variante 2:

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{19}=\frac{37}{342}=\frac{10101}{93366}<\frac{10602}{93366}=\frac{31}{273}=\frac{9486}{83538}<\frac{9555}{83538}=\frac{35}{306}=\frac{1}{17}+\frac{1}{18}$$

Der Bruch $\frac{31}{273}$ liegt also zwischen zwei benachbarten Summen jeweils zweier benachbarter Stammbrüche, kann also selbst keine Summe zweier benachbarter Stammbrüche sein. Mit derselben Begründung gilt dies auch für $\frac{52}{463}$, denn

$$\frac{1}{18}+\frac{1}{19}=\frac{37}{342}=\frac{17131}{158346}<\frac{17784}{158346}=\frac{52}{463}=\frac{15912}{141678}<\frac{16205}{141678}=\frac{35}{306}=\frac{1}{17}+\frac{1}{18}.$$

(c) Nach Max' Erklärung ist die Summe zweier benachbarter Stammbrüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a+1}$:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=\frac{(a+1)\cdot 1}{(a+1)\cdot a}+\frac{a\cdot 1}{a\cdot(a+1)}=\frac{(a+1)+a}{a\cdot(a+1)}=\frac{2a+1}{a\cdot(a+1)}$$

Begründung – Variante 1 (mit Bezug auf den Term $\frac{(a+1)+a}{a\cdot(a+1)}$):

$(a+1)+a$ und $(a+1)$ können keinen ganzzahligen gemeinsamen Teiler (größer als 1) haben, denn dann müssten auch a und $(a+1)$ einen gemeinsamen Teiler (>1) haben, was nicht möglich ist. Mit derselben Begründung sind auch $(a+1)+a$ und a teilerfremd. Da es somit

- keine gemeinsamen Teiler von $(a+1)+a$ und $(a+1)$ sowie
- keine gemeinsamen Teiler $(a+1)+a$ und a

gibt, kann es auch keine gemeinsamen Teiler von $(a+1)+a$ und $a\cdot(a+1)$ geben, der Bruch $\frac{(a+1)+a}{a\cdot(a+1)}$ ist also unkürzbar.

Begründung – Variante 2 (mit Bezug auf den Term $\frac{2a+1}{a\cdot(a+1)}$):

$2a+1$ und a können keinen gemeinsamen Teiler haben, denn $\frac{2a+1}{a}=2+\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{a}$ ist keine ganze Zahl, da $a>1$.
Auch $2a+1$ und $a+1$ können keinen gemeinsamen Teiler haben, denn $\frac{2a+1}{a+1}=\frac{2a+2-1}{a+1}=2-\frac{1}{a+1}$ und $\frac{1}{a+1}$ ist keine ganze Zahl.
Also sind $2a+1$ und $a\cdot(a+1)$ teilerfremd, der Bruch $\frac{2a+1}{a\cdot(a+1)}$ ist also unkürzbar.

(a) Hier zählt jede erlaubte Schrittfolge. Eine mögliche wäre

$$\begin{aligned} & KZ\underline{Z}KKZZ && \to KKKZ\underline{K}ZZ \to KKKKZ\underline{K}Z \\ \to\ & KKKK\underline{K}ZK && \to KKK\underline{Z}ZKK \to K\underline{K}ZKKKK \\ \to\ & \underline{Z}ZKKKKK && \to KKKKKKK. \end{aligned}$$

(b) Für fünf Münzen gibt es die folgenden 16 Startkonstellationen, die sich nicht in die Anordnung $KKKKK$ bringen lassen:

$$\begin{array}{cccc} ZKKKK, & KZKKK, & KKKZK, & KKKKZ, \\ ZZKZK, & ZZKKZ, & ZKKZZ, & KZKZZ, \\ ZKZKK, & KZZKK, & KKZZK, & KKZKZ, \\ ZZZZK, & ZZZKZ, & ZKZZZ, & KZZZZ. \end{array}$$

Diese sind gegenüber der Operation „Münze umdrehen" abgeschlossen, d.h. man erhält bei jeder Drehung wieder eine dieser Konstellationen, aber keine andere, also auch niemals die Konstellation $KKKKK$. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das zu begründen:

Begründungsmöglichkeit 1: Die Reihenfolge des Münzumdrehens hat offensichtlich keinen Einfluss auf das Endergebnis. Insbesondere gilt: Wenn man eine Münze zweimal umdreht, ergibt sich dasselbe, wie wenn man sie gar nicht umdreht, dreht man sie dreimal, so entspricht das einmal usw.

Daher lässt sich jede Lösungsmöglichkeit dadurch darstellen, dass man für jede der Münzen festlegt, ob sie umgedreht wird oder nicht. Wir zeigen für die Startaufstellung $ZKKKK$, dass sich bei keiner Umdrehkombination $KKKKK$ ergeben kann. Dazu bezeichnen wir die Münzpositionen von links nach rechts mit 1 bis 5. Damit am Schluss an Position 1 ein K steht, muss Münze 1 oder Münze 2 umgedreht worden sein. Die jeweils andere darf dann nicht gedreht werden, sonst stünde an Position 1 wieder ein Z. Damit ergibt sich dann zwingend:

- Wird Münze 1 gedreht, so darf Münze 2 nicht gedreht werden. Also muss Münze 3 gedreht werden, sonst stünde an Position 2 ein Z. Da also Münze 3 gedreht und Münze 2 nicht gedreht wird, muss Münze 4 gedreht werden, sonst stünde an Position 3 ein Z. Es ergibt sich die Konstellation $KKKKZ$, die man nur noch zum Sieg führen kann, indem man entscheidet, ob Münze 5 gedreht wird oder nicht. Das geht offensichtlich beides nicht.
- Wird Münze 2 gedreht, so ergibt sich analog zur ersten Argumentation, dass Münze 3 umgedreht werden muss, während Münze 1 und 4 nicht gedreht werden dürfen. Es ergibt sich die Konstellation $KKKZK$, die durch Drehen (bzw. Nicht-Drehen) von Münze 5 nicht zu $KKKKK$ gemacht werden kann.

Begründungsmöglichkeit 2: Kurz und prägnant lässt sich mit einem so genannten Invarianzargument begründen, dass nie die Anordnung $KKKKK$ erreicht werden kann. Dazu muss man eine gemeinsame Eigenschaft der oben aufgeführten Konstellationen erkennen: Es sind genau die Kombinationen mit ungerader Anzahl Kopf-Münzen in den Positionen 1, 2, 4 ,5. Man überzeugt sich relativ leicht, dass diese Anzahl beim Umdrehen einer beliebigen Münze immer ungerade bleibt: Es werden auf den Positionen 1,2,4,5 bei jedem Umdrehen entweder zwei K-Münzen zu Z (was nichts daran ändert, dass die Anzahl der Z-Münzen ungerade ist), zwei Z-Münzen zu K (dito) oder eine Z-Münze zu K und eine K-Münze zu Z (dito).

Es gibt also keine Möglichkeit, die obigen Konstellationen in die Konstellation $KKKKK$ zu bringen, da hier die Anzahl der Kopf-Münzen gerade ist.

(c) Es reicht, eine Strategie anzugeben, wie man jede beliebige Startkonstellation auf die Anordnungen $KKK\dots K$ oder $ZKK\dots K$ bringen kann. Im ersten Fall hat man sofort gewonnen, im zweiten nutzt man, dass man jetzt von $ZKKK\dots K$ aus das Spiel gewinnen kann.

Eine mögliche solche Strategie ist, wiederholt den folgenden Zug zu machen: Wähle die Münze direkt links neben demjenigen Z, das ganz rechts liegt, und drehe sie. Als Resultat liegt das Z, das am weitesten rechts liegt, danach weiter links. Wiederholt man diesen Zug, so liegt das letzte Z entweder an erster Stelle, d.h. man hat die gewünschte Kombination $ZKK\dots K$, oder man erhält sofort die Sieganordung $KKK\dots K$.

(d) Das Spiel lässt sich genau für alle Anzahlen n der Form $n = 3k + 2$ (also für $n = 2, 5, 8, 11, 14, \dots$) nicht aus jeder Startsituation heraus gewinnen. Das lässt sich wieder auf verschiedene Weisen begründen.

Begründungsmöglichkeit 1 (im Stile der Begründung 1 in (b)): Nach (c) kann man mit n Münzen ausgehend von jeder Startposition gewinnen, genau dann, wenn man die Anordnung $ZKKK\dots K$ auf die Form $KKKK\dots KK$ bringen kann. Um $ZKKK\dots K$ zu $KKKK\dots K$ zu machen, wird man wie in der ersten Begründung in der Lösung von (b) entweder die erste oder zweite Münze umdrehen müssen, damit das Z an Position 1 verschwindet. Mit ähnlichen Argumenten wie in (b) ergibt sich weiter:

- Wird Münze 1 gedreht, so müssen die Münzen $1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, \dots$ gedreht werden. Hierbei ergibt sich die Konstellation $KKKK\dots K$ genau dann, wenn $n = 3k + 1$ ist.
- Wird Münze 2 gedreht, so müssen die Münzen $2, 3, 5, 6, 8, 9, \dots$ gedreht werden. Hierbei ergibt sich die Konstellation $KKKK\dots K$ genau dann, wenn $n = 3k$ ist.

Begründungsmöglichkeit 2 (im Stile der Begründung 2 in (b)): Um zu begründen, dass man für $n = 3k + 2$ nicht immer gewinnen kann, kann wieder ein Invarianzargument benutzt werden: Zum Beispiel kann man die Anzahl Z_n der Zahl-Münzen an den Positionen $1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots, 3k-1, 3k+1, 3k+2$ betrachten. Da jeder Zug genau zwei Münzen in dieser Anzahl ändert, bleibt Z_n immer gerade oder immer ungerade. Deshalb kann z. B. die Ausgangssituation, bei der ein Z ganz links liegt und alle anderen Münzen K zeigen, nicht zu einer reinen K-Reihe gemacht werden.

Nun ist noch zu zeigen, dass sich für alle Zahlen $n \neq 3k + 2$ jede Konstellation mit der in die gewünschte Form bringen lässt. Das geht mit der folgenden Strategie: Leonie erzeugt zunächst wie in (c) die Konstellation $ZKKK\dots K$.

- Ist $n = 3k$, so dreht Leonie zunächst die Münzen 2 und 3 und erhält die Anordnung
$$KKK|ZKK|KKK|\dots|KKK.$$
Sie dreht dann die Münzen 5 und 6 und erhält
$$KKK|KKK|ZKK|\dots|KKK.$$
dann die Münzen 8 und 9 usw., und das Verfahren führt nach k solchen Doppelschritten zum Erfolg.
- Ist $n = 3k + 1$, so wählt Leonie zunächst die Münze ganz links und erhält so
$$K|ZKK|KKK|KKK|\dots|KKK.$$
Eine Strategie analog zu der für $n = 3k$, startend mit den Münzen 3 und 4, dann 6 und 7 usw. führt von hier aus zum Erfolg.

Schule:	**Team-Nummer:**	**PUNKTE**

Aufgabe 1

(Aufgabe (a) : 2 Punkte,
(b) : 3 Punkte,
(c) : 5 Punkte)

Wenn man $(1 + x^5 + x^7)^{20}$ ausmultipliziert, entsteht eine Summe der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

a) Bestimme a_1.

b) Bestimme die größte Zahl n, für die $a_n \neq 0$ ist, und gib a_n an.

c) Bestimme a_{17}.

Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 2

(Aufgabe (a) : 3 Punkte,
(b) : 4 Punkte,
(c) : 3 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus drei voneinander unabhängigen Teilen.

a) Die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks seien $a, b > 0$, und die Länge der Hypotenuse dieses Dreiecks sei $c > 0$. Zeige für jede natürliche Zahl $n \geq 3$

$$a^n + b^n < c^n.$$

b) Seien a, b, c reelle Zahlen. Zeige, dass mindestens eine der drei Zahlen $A = 9a^2 - 4b + 1$, $B = b^2 + 2c + 4$, $C = c^2 - 6a + 1$ nicht negativ ist.

c) Betrachte die Menge der Zahlen $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Wie viele Teilmengen mit 7 Elementen gibt es, so dass die Summe dieser 7 Elemente durch 3 teilbar ist?

Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 3

(Aufgabe (a) : 5 Punkte,
(b) : 5 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilen.

a) Sei $p > 5$ eine Primzahl. Beweise, dass 1920 ein Teiler von $p^4 - 10p^2 + 9$ ist.

b) Bestimme alle Primzahlen p und q, so dass $p^2 + p^2q^2 + q^2$ eine Quadratzahl ist.

Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

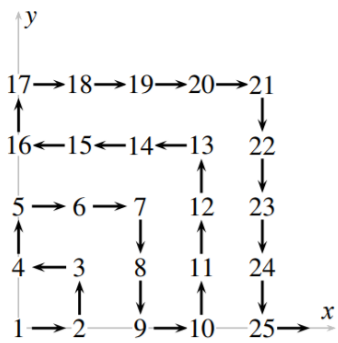
Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 4

(Aufgabe (a) : 5 Punkte,
(b) : 5 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilen.

a) Wir nummerieren die Punkte in der Ebene mit ganzzahligen nicht negativen Koordinaten wie folgt:



Welche Koordinaten hat der Punkt, der zur Zahl 2022 gehört?

b) Eine Chamäleonkolonie enthält gegenwärtig 20 rote, 18 blaue und 16 grüne Tiere. Wenn sich zwei verschiedenfarbige Chamäleons treffen, ändern beide ihre Farbe, und sie nehmen die dritte Farbe an; treffen sich zum Beispiel ein rotes und ein blaues Chamäleon, werden beide grün. Wenn sich zwei gleichfarbige treffen, passiert nichts. Ist es möglich, dass nach einer gewissen Zeit nur noch Chamäleons einer Farbe da sind?

Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

Man muss 20 Klammern ausmultiplizieren; dazu muss man aus jeder Klammer einen Summanden nehmen und dann das Produkt davon – und dies muss man für alle möglichen Wahlen von Summanden durchführen und alles addieren. Daher ist für $k \geq 1$ der Koeffizient a_k genau dann von 0 verschieden, wenn man k als Summe von 5en und 7en darstellen kann. Die Anzahl der möglichen Darstellungen von Summen mit den Summanden 0, 5 und 7 ist dann a_k.

(a) Da 1 nicht als Summe von 5en und 7en dargestellt werden kann, ist $a_1 = 0$.

(b) Um n zu bestimmen, muss man in jeder Klammer den Summanden x^7 wählen, also ist $n = 20 \cdot 7 = 140$, und da es nur eine Möglichkeit gibt, $140 = 7 + 7 + \cdots + 7$ zu schreiben, ist $a_{140} = 1$.

(c) 17 ist die Summe aus zwei 5en und einer 7 (und das ist die einzige Kombination aus 5en und 7en, um die 17 zu erhalten). Um a_{17} zu berechnen, muss man also wissen, wie viele solche Kombinationen es gibt. Das bekommt man so heraus: Es gibt 20 Möglichkeiten, eine Klammer zu wählen für den Summanden x^7. Danach bleiben 19 Möglichkeiten, die erste Klammer für x^5 zu wählen, und danach 18 Möglichkeiten für die zweite Klammer. Das scheint insgesamt auf $20 \cdot 19 \cdot 18$ hinauszulaufen. Aber Achtung: die Klammern mit x^5 wurden doppelt gezählt! Ob man zuerst die 3. Klammer und dann die 6. Klammer auswählt oder umgekehrt, spielt keine Rolle und trägt nur einmal zum Gesamtergebnis bei und nicht zweimal. Daher lautet das richtige Ergebnis

$$a_{17} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{2} = 3420.$$

(a) Nach dem Satz von Pythagoras ist

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Division durch c^2 liefert

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Daher sind $0 < a/c < 1$ und $0 < b/c < 1$ und deshalb für $n \geq 3$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^n < \left(\frac{a}{c}\right)^2, \quad \left(\frac{b}{c}\right)^n < \left(\frac{b}{c}\right)^2$$

und deshalb

$$\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n < \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Multiplikation mit c^n liefert die zu zeigende Ungleichung

$$a^n + b^n < c^n.$$

(b) Der Trick ist zu zeigen, dass die Summe $A + B + C \geq 0$ ist – dann können nicht alle drei Summanden negativ sein, so dass mindestens einer nicht negativ (also ≥ 0) ist. Es ist

$$\begin{aligned} A + B + C &= (9a^2 - 4b + 1) + (b^2 + 2c + 4) + (c^2 - 6a + 1) \\ &= (9a^2 - 6a + 1) + (b^2 - 4b + 4) + (c^2 + 2c + 1) \\ &= (3a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c + 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(c) Wir beobachten zunächst, dass die Summe $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ durch 3 teilbar ist. Daher ist eine 7er Teilmenge von $\{1, \ldots, 9\}$ so beschaffen, dass die Summe ihrer Elemente durch 3 teilbar ist, wenn das auch für die Menge aus den zwei übriggebliebenen Zahlen gilt, und umgekehrt. Daher ist nur folgende Frage zu beantworten: *Wie viele Teilmengen mit 2 Elementen gibt es, so dass die Summe dieser 2 Elemente durch 3 teilbar ist?* Das ist jetzt schnell durch Abzählen zu lösen:

- Wenn das kleinste Element der 2er Teilmenge 1 ist, sind dies $\{1, 2\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 8\}$.
- Wenn das kleinste Element der 2er Teilmenge 2 ist, sind dies $\{2, 4\}$, $\{2, 7\}$.
- Wenn das kleinste Element der 2er Teilmenge 3 ist, sind dies $\{3, 6\}$, $\{3, 9\}$.
- Wenn das kleinste Element der 2er Teilmenge 4 ist, sind dies $\{4, 5\}$, $\{4, 8\}$.
- Wenn das kleinste Element der 2er Teilmenge 5 ist, ist dies $\{5, 7\}$.
- Wenn das kleinste Element der 2er Teilmenge 6 ist, ist dies $\{6, 9\}$.
- Wenn das kleinste Element der 2er Teilmenge 7 ist, ist dies $\{7, 8\}$.

Das sind insgesamt 12 Teilmengen.

(a) Als erstes berechnen wir die Primfaktorzerlegung von 1920:

$$1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5.$$

Als nächstes faktorisieren wir unseren Ausdruck:

$$\begin{aligned} p^4 - 10p^2 + 9 = (p^2-5)^2 - 16 &= (p^2-5)^2 - 4^2 \\ &= \Big((p^2-5)-4\Big)\Big((p^2-5)+4\Big) = (p^2-9)(p^2-1) \\ &= (p^2-3^2)(p^2-1^2) = (p-3)(p+3)(p-1)(p+1). \end{aligned}$$

[Das kann man auch so sehen: Das Polynom $x^2 - 10x + 9$ hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 9$, also $x^2 - 10x + 9 = (x-1)(x-9)$.]

Nun beweisen wir, dass dieses Produkt durch $2^7 \cdot 3 \cdot 5$ teilbar sein muss.

- Da $p > 5$ eine Primzahl ist, ist p ungerade, und die Zahlen $p-3$, $p-1$, $p+1$, $p+3$ sind vier aufeinanderfolgende gerade Zahlen.
  - Als solche sind alle durch 2 teilbar, zwei von ihnen sind durch 4 teilbar, und eine von ihnen ist auch durch 8 teilbar. Insgesamt bedeutet dies, dass deren Produkt durch 2^7 teilbar sein muss.
  - Außerdem ist unter vier aufeinanderfolgenden geraden Zahlen immer mindestens eine, die durch 3 teilbar ist. (Das stimmt schon bei drei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen.)
- Da $p > 5$ eine Primzahl ist, kann p nicht auf 5 enden (sonst wäre sie durch 5 teilbar). Das wiederum bedeutet, dass eine von den vier Zahlen auf 0 endet und als solche durch 5 teilbar ist.

Insgesamt können wir folgern, dass das Produkt $(p-3)(p+3)(p-1)(p+1)$ durch $2^7 \cdot 3 \cdot 5$ teilbar ist.

(b) Nehmen wir an, dass $p^2 + p^2q^2 + q^2 = n^2$ eine Quadratzahl ist. Als erstes betrachten wir diese Gleichung modulo 4, d.h., wir betrachten den Rest, wenn wir durch 4 dividieren. Bei Division durch 4 ist der Rest einer Quadratzahl 0, wenn die Zahl gerade ist [$(2m)^2 = 4m^2$ ist durch 4 teilbar], und es ist 1, wenn die Zahl ungerade ist [$(2m-1)^2 = 4m^2 - 4m + 1$, also bleibt der Rest 1]. Daraus folgt, dass unsere Gleichung nur dann gelten kann, wenn eine von den beiden Zahlen p und q, zum Beispiel p, gerade ist. Da p eine Primzahl ist, bedeutet das wiederum $p = 2$, und unsere Gleichung nimmt dadurch die Form $4 + 5q^2 = n^2$ an. Diese Gleichung können wir jetzt wie folgt umschreiben:

$$5q^2 = n^2 - 4 = n^2 - 2^2 = (n-2)(n+2).$$

Die linke Seite hier ist durch q^2 teilbar, also muss die rechte Seite es auch sein. Aber q ist eine Primzahl, und wenn eine Primzahl ein Produkt teilt, muss sie einen der Faktoren teilen.

Als erstes nehmen wir jetzt an, dass beide Faktoren $n-2$ und $n+2$ durch q teilbar sind. In diesem Fall ist $(n+2)-(n-2) = 4$ auch durch q teilbar, was aber nur dann möglich ist, wenn die Primzahl q gleich 2 ist. In diesem Fall haben wir $p^2 + p^2q^2 + q^2 = 24$, was aber keine Quadratzahl ist.

Ab jetzt, können wir daher annehmen, dass entweder $n-2$ oder $n+2$ durch q^2 teilbar ist. Jedenfalls folgt daraus

$$n \geq q^2 - 2 \;\Rightarrow\; 4 + 5q^2 = n^2 \geq (q^2-2)^2 = q^4 - 4q^2 + 4 \;\Rightarrow\; 9q^2 \geq q^4 \;\Rightarrow\; 9 \geq q^2 \;\Rightarrow\; 3 \geq q.$$

Wir haben schon gesehen, dass $q = 2$ keine Lösung Liefert, also die einzige Möglichkeit, die übrig bleibt, ist $q = 3$. In diesem Fall haben wir $p^2 + p^2q^2 + q^2 = 49$, was tatsächlich eine Quadratzahl ist.

[Alternativargument hierfür: Wenn q^2 ein Teiler von $n - 2$ ist, ist natürlich $q^2 \leq n - 2$, so dass $5q^2 \geq q^2(n + 2)$, also $5 \geq n + 2$ und $n \leq 3$; aber weder 3^2 noch 2^2 sind von der Form $4 + 5q^2$, q prim. Wenn q^2 ein Teiler von $n + 2$ ist, ist $5q^2 \geq q^2(n - 2)$, also $5 \geq n - 2$ und $n \leq 7$; von diesen n ist nur 7 von der gewünschten Form (mit $q = 3$).]

Die einzigen Primzahlen, für die $p^2 + p^2q^2 + q^2$ eine Quadratzahl ist, sind also $p = 2$, $q = 3$ oder $p = 3$, $q = 2$.

(a) Wir stellen zunächst fest, dass auf den Koordinatenachsen Quadratzahlen stehen und zwar $4 = 2^2$, $16 = 4^2, \dots$ auf der y-Achse bzw. $9 = 3^2$, $25 = 5^2, \dots$ auf der x-Achse.

Um diese Beobachtung zu erklären, betrachten wir die (polygonale) Kurve, die die Punkte der Ebene $E = \{0, 1, 2, \dots\}^2$ auf die angegebene Art und Weise verbindet und nummerieren sie mit $N = 1, 2, 3, \dots$ durch, ausgehend von $N = 1$ für den Punkt mit den Koordinaten $(0, 0)$, mit $N = 2$ für den Punkt mit den Koordinaten $(1, 0)$, mit $N = 3$ für den Punkt $(1, 1)$ usw.

Da sich die Kurve parallel zu den Koordinatenachsen bewegt und jeden Punkt von E überstreicht (d.h. sie ist als Kurve in E raumfüllend), entspricht die Quadratzahl $N = (2k)^2$ auf der y-Achse gerade der Anzahl der Punkte aus E, die in einem Quadrat mit Kantenlänge $2k - 1$ liegen, dessen untere linke Ecke der Punkt (0,0) ist; für den Index $N = (2k+1)^2$, der zu einem Punkt auf der x-Achse gehört, hat das entsprechende Quadrat die Kantenlänge $2k$.

Wir suchen die Koordinaten des Punktes mit der Nummer $N^* = 2022$, der wegen

$$1936 = 44^2 < N^* < 45^2 = 2025$$

auf den Kanten des Quadrates mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 44)$, $(44, 44)$ und $(44, 0)$ liegen muss; der Eckpunkt $(44, 0)$ hat dabei die Nummer $N = (44 + 1)^2 = 2025$; von dort parallel zur y-Achse 3 Schritte zurück zu $N = N^*$ führt uns zum gesuchten Punkt mit den Koordinaten

$$(x^*, y^*) = (44, 3)\,.$$

(b) Wir bezeichnen mit N_R, N_B bzw. N_G jeweils die Anzahl der roten, blauen bzw. grünen Chamäleons. Eine denkbare Lösungsstrategie besteht darin, ausgehend von einer möglichen Endkonfiguration wie z.B. $N_R = N_B = 0$ und $N_G = 54$ durch Rückwärtsiteration auf die möglichen Anfangskonfigurationen zu schließen. Man merkt jedoch bereits nach wenigen Iterationen, dass es zu viele Kombinationsmöglichkeiten gibt und dieser Weg daher nicht zielführend ist.

Um zu entscheiden, ob die Anfangskonfiguration $N_R = 20$, $N_B = 18$, $N_G = 16$ jemals auf eine einfarbige Chamäleonkolonie führen kann, machen wir uns zunächst klar, dass nach jedem Aufeinandertreffen von zwei Chamäleons der gleiche Rest bleibt, wenn man die Differenzen zwischen N_R, N_B bzw. N_G durch 3 teilt. Treffen beispielsweise ein rotes und ein grünes Chamäleon aufeinander, so erhöht sich N_B um 2, wobei sich N_R und N_G jeweils um 1 verringern. Wenn wir mit N'_R, N'_B bzw. N'_G die Zahl der Chamäleons nach dem Aufeinandertreffen bezeichnen, gilt in unserem Beispiel

$$\begin{aligned} N'_R - N'_G &= N_R - N_G \\ N'_R - N'_B &= N_R - N_B - 3 \\ N'_B - N'_G &= N_B - N_G + 3\,. \end{aligned}$$

Für die Anfangskonfiguration gilt bei Division durch 3:

$$\begin{aligned} (N_R - N_G) \bmod 3 &= 1 \\ (N_R - N_B) \bmod 3 &= 2 \\ (N_B - N_G) \bmod 3 &= 2\,. \end{aligned}$$

Da die Differenzen der Anfangskonfiguration nicht durch 3 teilbar sind, werden sie es also in jedem späteren Schritt ebenfalls nicht sein. Es wird also nie eine Konfiguration geben, bei der zwei Farben komplett verschwinden, da die entsprechende Differenz $(= 0)$ dann ja durch 3 teilbar ist.

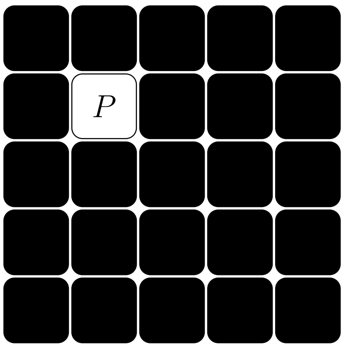
Schule:	Team-Nummer:	PUNKTE

Aufgabe 1

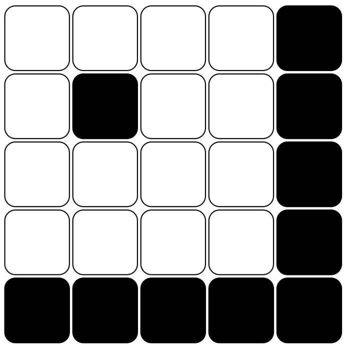
(Aufgabe (a) : 4 Punkte,
(b) : 3 Punkte,
(c) : 3 Punkte)

Mit einem Grafikprogramm bearbeitet ihr ein (5×5)-Feld, welches aus 25 Pixeln besteht. Jedes Pixel kann entweder schwarz oder weiß sein. Zu Beginn ist genau ein Pixel P weiß, alle anderen sind schwarz.

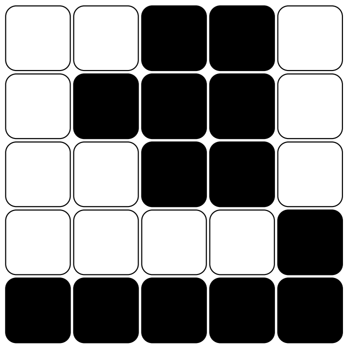
Ihr möchtet nun alle Pixel weiß färben. Allerdings ist das Grafikprogramm defekt und gestattet euch nicht, die Farbe eines einzelnen Pixels von schwarz zu weiß oder von weiß zu schwarz umzukehren. Ihr könnt lediglich die Farben aller Pixel des (5×5)-Feldes gleichzeitig umkehren oder die eines beliebigen (2×2)-, (3×3)- oder (4×4)-Teilquadrates. Eine solche Umkehrung der Farben nennen wir *Umfärbung*.



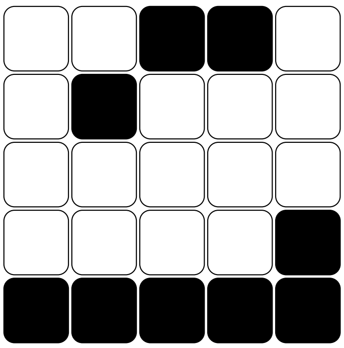
(a) *Mögliche Startkonfiguration mit weißem Feld P.*



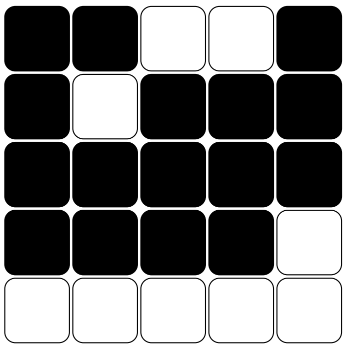
(b) *Farbumkehr des (4×4)-Qua-drats oben links von (a).*



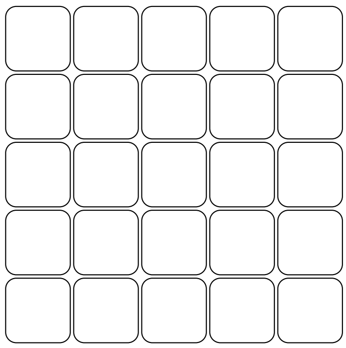
(c) *Farbumkehr des (3×3)-Qua-drats oben rechts von (b).*



(d) *Farbumkehr des (2×2)-Qua-drats Mitte oben rechts von (c).*



(e) *Farbumkehr des gesamten (5×5)-Felds von (d).*



(f) *Zielkonfiguration*

Bild (a) zeigt eine mögliche Startfärbung des (5×5)-Felds; Bilder (b) bis (e) zeigen eine mögliche Folge von Umfärbungen beginnend mit der Startfärbung (a); Bild (f) zeigt die gewünschte Zielfärbung.

a) Gebt ein Pixel P an, sodass die Startkonfiguration mit dem einzig weißen Pixel P durch eine geeignete Folge von Umfärbungen zu der Zielkonfiguration des komplett weißen (5×5)-Felds umgefärbt werden kann. Notiert auch eine Folge von Umfärbungen, die für eure Wahl des Pixels P die gewünschte Zielfärbung liefert!

b) Gebt alle möglichen Pixel P an, sodass die Startkonfiguration mit dem einzig weißen Pixel P durch eine geeignete Folge von Umfärbungen zu der Zielkonfiguration des komplett weißen (5×5)-Felds umgefärbt werden kann. Gebt für die von euch gefundenen

Pixel P entsprechende Folgen von Umfärbungen an und beweist, dass es für alle anderen Pixel nicht möglich ist, die zugehörige Startkonfiguration in das vollständig weiße 5×5-Feld umzufärben.

c) Wir betrachten eine Konfiguration des (5×5)-Felds, die aus einer beliebigen Folge von Umfärbungen einer Startkonfiguration mit dem einzig weißen Pixel P entsteht. Über die Position von P ist nichts bekannt. Ein schwarzes Pixel habe nun den Wert 1, ein weißes Pixel den Wert -1. Sei a_i das Produkt aller Werte der Pixel in der i-ten Zeile und b_j das Produkt aller Werte der Pixel in der j-ten Spalte. Zeigt, dass

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

niemals Null sein kann.

Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch das folgende Blatt.

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

(Aufgabe (a) : 2 Punkte,
(b) : 3 Punkte,
(c) : 3 Punkte,
(d) : 2 Punkte)

Aufgabe 2

a) Zeigt, dass 2^{2022} kein Teiler von 2022! ist.

b) Auf wie viele Nullen endet 2022!? *(Eure Antwort ist zu beweisen!)*

c) Findet alle Ziffern z (also ganze Zahlen zwischen 0 und 9), für die es eine positive ganze Zahl n gibt, sodass 2^n und 5^n beide mit z beginnen.

(Für jede von euch gefundene Ziffer z sollt ihr ein entsprechendes n angeben. Für alle anderen Ziffern müsst ihr beweisen, dass es kein n geben kann, sodass 2^n und 5^n beide mit z beginnen!)

d) Gibt es eine Zahl, die eine Potenz von 2 ist, sodass man die Ziffern dieser Zahl zu einer andern Zahl umstellen kann, die wieder eine Potenz von 2 ist?

(Führende Nullen sind dabei nicht zulässig. Gebt eine solche Zahl an, oder beweist, dass es keine solche geben kann!)

Lösung:

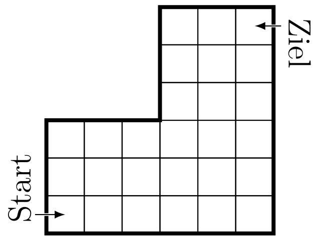
Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

Schule:	Team-Nummer:	PUNKTE

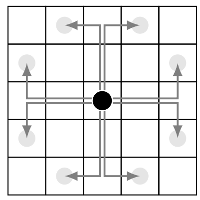
(Aufgabe (a) : 2 Punkte,
(b) : 3 Punkte,
(c) : 2 Punkte,
(d) : 3 Punkte)

Aufgabe 3

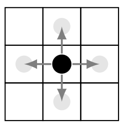
Wir betrachten das unter diesem Absatz gezeigte Spielbrett aus 27 Feldern und zwei verschiedene Spielfiguren: Ein *Springer* kann wie beim Schach in einem Zug zwei Felder nach oben oder unten und ein Feld nach rechts oder links zurücklegen, oder er kann ein Feld nach oben oder unten und zwei Felder nach rechts oder links gehen. Ein *Türmchen* hingegen kann von einem Feld aus nur in eines der oben, unten, rechts oder links angrenzenden Fehler gehen.



Spielbrett



Bewegungsmöglichkeiten des Springers



Bewegungsmöglichkeiten des Türmchens

Eure Antworten auf die folgenden vier Fragen sind jeweils zu begründen!

a) Was ist die minimale Anzahl an Zügen, die ein Springer vom Startfeld unten links zum Zielfeld oben rechts benötigt?

b) Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann ein Springer in dieser minimalen Anzahl an Zügen vom Start- ins Zielfeld gelangen?

c) Was ist die minimale Anzahl an Zügen, die ein Türmchen vom Startfeld unten links zum Zielfeld oben rechts benötigt?

d) Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann ein Türmchen in dieser minimalen Anzahl an Zügen vom Start- ins Zielfeld gelangen?

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

(Aufgabe (a) : 4 Punkte,
(b) : 2 Punkte,
(c) : 2 Punkte,
(d) : 2 Punkte)

Aufgabe 4

Gegeben sei ein ebenes Dreieck $\triangle A_1A_2A_3$ mit den Kanten $a_1 = \overline{A_1A_2}$, $a_2 = \overline{A_2A_3}$, $a_3 = \overline{A_3A_1}$. Für eine Gerade g bezeichne α_i den Winkel, um den g im Uhrzeigersinn gedreht werden muss, um parallel zur Kante a_i zu sein. Ist P ein Punkt in der Ebene, so bezeichne F_i den orientierten Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A_iA_{i+1}P$, wobei wir $A_4 = A_1$ setzen. Dabei gilt $F_i > 0$, $F_i = 0$ oder $F_i < 0$, je nachdem, ob P zur Linken, auf oder zur Rechten der orientierten Gerade $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ liegt. Der Flächeninhalt F des Dreiecks $\triangle A_1A_2A_3$ ist dann durch $F = F_1 + F_2 + F_3$ gegeben (muss nicht gezeigt werden).

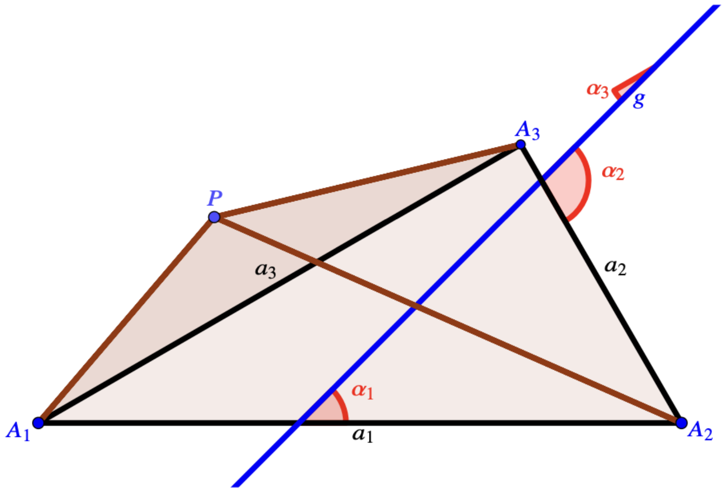


Illustration der verwendeten Bezeichnungen. Im obigen Beispiel ist $F_1, F_2 > 0$, aber $F_3 < 0$.

In Abhängigkeit von der Geraden g und vom Punkt P betrachten wir nun die Funktion

$$f_g(P) := (\cos(\alpha_1))^2 F_1 + (\cos(\alpha_2))^2 F_2 + (\cos(\alpha_3))^2 F_3.$$

a) Beweist, dass der Umkreismittelpunkt M von $\triangle A_1A_2A_3$ die Gleichung $f_g(M) = \frac{F}{2}$ für alle Geraden g erfüllt.

b) Begründet, dass alle Punkte P, die für eine gegebene Gerade g die Gleichung $f_g(P) = \frac{F}{2}$ erfüllen, auf einer Gerade liegen.

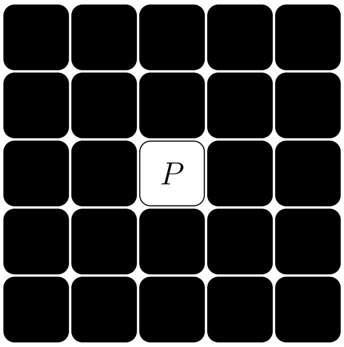
c) Zeigt, dass für einen gegebenen Punkt P die Gleichung $f_g(P) = \frac{F}{2}$ nur dann für alle Geraden g erfüllt ist, wenn $P = M$ der Umkreismittelpunkt ist.

d) Sei nun $A_1A_2 \ldots A_n$ ein konvexes Polygon mit Kanten $a_1a_2 \ldots a_n$ und Flächeninhalt F, welches einen Umkreis besitzt. Der Umkreismittelpunkt sei M. Wieder bezeichne für eine Gerade g α_i den Winkel, um den g im Uhrzeigersinn gedreht werden muss, um parallel zur Kante a_i zu sein. F_i ist nun der orientierte Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A_iA_{i+1}M$, wobei wir $A_{n+1} = A_1$ setzen. Beweist, dass

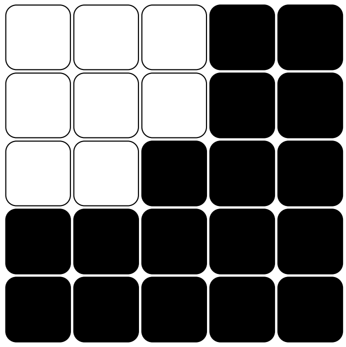
$$(\cos(\alpha_1))^2 F_1 + (\cos(\alpha_2))^2 F_2 + \ldots + (\cos(\alpha_n))^2 F_n = \frac{F}{2}$$

für alle Geraden g gilt.

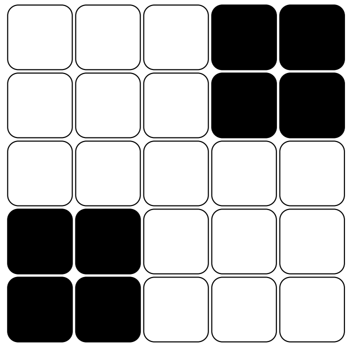
a) Wir betrachten die Startkonfiguration, in der genau das zentrale Pixel weiß ist. Kehren wir nun die Farben in den (3×3)-Teilquadraten oben links und unten rechts sowie in den (2×2)-Teilquadraten oben rechts und unten links um, erhalten wir die Zielkonfiguration mit nur weißen Pixeln, wie die folgende Bildfolge zeigt.



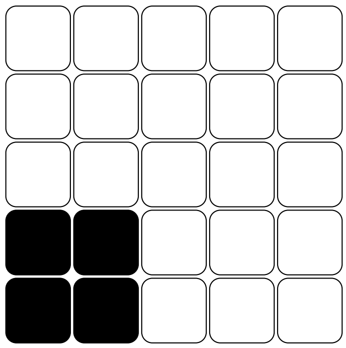
(a) *Startkonfiguration mit weißem Feld P im Zentrum.*



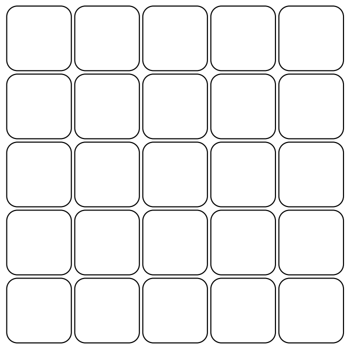
(b) *Farbumkehr des (3×3)-Qua-drats oben links von (a).*



(c) *Farbumkehr des (3×3)-Qua-drats unten rechts von (b).*



(d) *Farbumkehr des (2×2)-Qua-drats oben rechts von (c).*



(e) *Farbumkehr des (2×2)-Qua-drats unten links von (d).*

Lösung von Teilaufgabe a): Eine Folge von Umfärbungen, die aus der Startkonfiguration das komplett weiße (5×5)-Feld macht.

b) Sei s die Anzahl der schwarzen Pixel, die sich in der ersten, zweiten, vierten oder fünften Reihe befinden. Die Anzahl der Pixel g eines umkehrbaren $(n \times n)$-Feldes, die nicht in der mittleren Reihe liegen, sind

n	5	4	3	2
Anzahl Pixel	20	12	6	2 oder 4

Somit ist g in jedem Fall eine gerade Zahl. Sei $s' \leq g$ die Anzahl dieser g Pixel, die schwarz sind. Kehren wir nun die Farben in dem $(n \times n)$-Feld um, so ändert sich s' zu $g - s'$. Außerhalb des $(n \times n)$-Feldes ändern sich die Farben nicht, sodass dort auch nach dem Umfärben noch $s - s'$ schwarze Pixel in den betrachteten Reichen sind. Somit ändert sich s zu $s + g - 2s'$. Insbesondere ändert sich die Parität von s durch Umfärben nicht, das heißt, die Anzahl an schwarzen Pixeln, die sich nicht in der mittleren Reihe befinden, bleibt stets gerade beziehungsweise ungerade, je nach Startkonfiguration.

Nun besteht die Zielkonfiguration nur aus weißen Pixeln. Also ist hier $s = 0$ gerade. Folglich muss die Anzahl an schwarzen Pixeln in der ersten, zweiten, vierten und fünften Reihe auch in der Startkonfiguration gerade sein. Sind alle Pixel in diesen Reihen schwarz, so ist die Zahl 20 und damit gerade. Folglich kann sich das zu Beginn weiße Pixel P nicht in einer dieser Reihen befinden und muss in der zentralen Reihe sein.

Vertauschen wir Reihen und Spalten in unserer Argumentation, so sehen wir, dass P auch in der zentralen Spalte sein muss. Somit lässt sich nur die Startkonfiguration, in der das weiße Pixel P im Zentrum steht, durch eine Folge von Umfärbungen in das komplett weiße (5×5)-Feld wandeln. Die zugehörige Folge von Umfärbungen wurde bereits in Aufgabenteil a) geliefert.

c) Sei m die Anzahl der Indizes i, für die a_i negativ ist, und sei n die Anzahl der Indizes j, für die b_j negativ ist. Insbesondere ist a_i für $5 - m$ Indizes und b_j für $5 - n$ Indizes positiv. Folglich

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 &= -m + 5 - m - n + 5 - n \\ &= 10 - 2n - 2m \\ &= 2 \cdot (5 - m - n) \end{aligned}$$

Es reicht also zu zeigen, dass $m+n$ gerade und damit $5-m-n \neq 0$ ist. Dazu betrachten wir das Produkt der Werte aller 25 Pixel. Dies ist einerseits gleich $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = (-1)^m$ und andererseits gleich $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot b_5 = (-1)^n$. Daher $(-1)^m = (-1)^n$, das heißt, $m + n$ ist gerade.

a) Von den Zahlen von 1 bis 2022 ist jede zweite Zahl gerade, jede vierte Zahl ist durch 4 teilbar, und so weiter. Folglich lässt sich 2022! nur

$$\begin{aligned} & \left\lfloor\frac{2022}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2022}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2022}{8}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\frac{2022}{1024}\right\rfloor \\ < \; & 2022 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{1024}\right) \\ < \; & 2022 \end{aligned}$$

mal durch 2 teilen.

b) Die Anzahl der Nullen, auf die 2022! endet, entspricht der Häufigkeit des Faktors $10 = 2 \cdot 5$ in 2022!. Wir zählen zunächst die Häufigkeit des Faktors 5. Jede fünfte Zahl ist durch 5 teilbar, jede fünfundzwanzigste sogar durch 5^2, jede einhundertfünfundzwanzigste durch 5^3 und so weiter. Der Faktor 5 kommt in 2022! also

$$\left\lfloor\frac{2022}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2022}{25}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2022}{125}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2022}{625}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{2022}{3125}\right\rfloor = 404 + 80 + 16 + 3 + 0 = 503$$

mal vor.

Der Faktor 2 hingegen kommt zumindest 1011 Mal in 2022! vor, da jede zweite Zahl gerade ist. Daher ist 10^{503} die größte Zehnerpotenz, die 2022! teilt, und 2022! endet auf 503 Nullen.

c) Angenommen, 2^n und 5^n beginnen beide mit z. Sei a die Anzahl an Stellen von 2^n und b die Anzahl an Stellen von 5^n. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z \cdot 10^a \; &< \; 2^n \; < \; (z+1) \cdot 10^a, \\ z \cdot 10^b \; &< \; 5^n \; < \; (z+1) \cdot 10^b. \end{aligned}$$

Gleichheit kann nicht erfüllt sein, weil 10^a durch 5 und 10^b durch 2 teilbar ist. Multiplizieren wir die beiden Ungleichungen und teilen durch 10^{a+b}, so erhalten wir

$$z^2 \; < \; 10^{n-a-b} \; < \; (z+1)^2.$$

Es ist $z \geq 1$ und $z \leq 9$, sodass $z^2 \geq 1$ und $z^2 < 100$ und daher

$$10^0 \; < \; 10^{n-a-b} \; < \; 10^2.$$

Folglich ist $n - a - b = 1$ und damit

$$z^2 \; < \; 10 \; < \; (z+1)^2.$$

Da z eine ganze Zahl ist, erhalten wir

$$z^2 \; \leq \; 3^2 \; < \; 10 \; < \; 4^2 \; \leq \; (z+1)^2,$$

woraus $z = 3$ folgt. Damit ist $z = 3$ die einzige Ziffer, sodass es ein n gibt, für das 2^n und 5^n beide mit z beginnen. Das kleinste Beispiel ist $n = 5$ mit $2^5 = 32$ und $5^5 = 3125$.

d) Angenommen, 2^a und 2^b wären solche Zahlen, $a > b$. Da der Rest einer Zahl bei Division durch 9 gleich dem ihrer Quersumme ist und die beiden Zweierpotenzen durch Ziffernvertauschen ineinander übergehen, muss die Differenz $2^b(2^{a-b}-1)$ durch 9 teilbar sein. Da 2^a und 2^b die gleiche Anzahl an Ziffern haben, kann $a - b$ nur 1, 2 oder 3 sein. Damit ist $2^{a-b} - 1$ gleich 1, 3 oder 7 und insbesondere nicht durch 9 teilbar. Also gibt es keine solche Zahl.

a) Der Springer kann in vier Zügen vom Start- ins Zielfeld gelangen. In weniger Zügen ist dies nicht möglich. Zum Beispiel springt er dazu jeweils 1, 2, 1, 1 Schritte nach rechts und 2, -1, 2, 2 Schritte nach oben (für die andere Möglichkeit siehe Aufgabenteil b)).

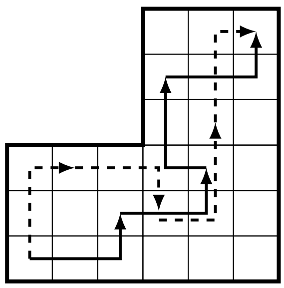
Um die fünf Schritte nach rechts zu gehen, sind mindestens drei Züge des Springers vonnöten. Drei Schritte reichen jedoch nicht aus.

Begründung 1: In drei Zügen müsste der Springer jedoch in beliebiger Reihenfolge 2, 2, 1 Schritte nach rechts gehen und würde dann nicht mehr als 1, 1, 2 – also vier – Schritte nach oben gehen können.

Begründung 2: Wir betrachten eine Schachbrettfärbung des Spielfeldes. Dann wechselt der Springer bei jedem Zug die Farbe. Start- und Zielfeld sind jedoch gleich gefärbt, folglich muss die Anzahl an Spielzügen gerade sein.

b) Es gibt nur zwei solche Wege, eine pro Startmöglichkeit. Diese sind gegeben durch:

- er springt jeweils 2, 2, -1, 2 Schritte nach rechts und 1, 1, 2, 1 Schritte nach oben;
- er springt jeweils 1, 2, 1, 1 Schritte nach rechts und 2, -1, 2, 2 Schritte nach oben.



Die zwei verschiedenen kürzesten Wege für den Springer.

Begründung: Wir erhalten den zweiten Weg aus dem ersten indem wir die Rollen von Rechts und Links sowie von Start und Ziel vertauschen. Dementsprechend geben wir im Folgenden nur die Argumentation für den ersten Weg an, der durch die Wahl des ersten Schrittes gegeben ist.

Der Springer muss in vier Zügen insgesamt fünf Schritte nach rechts und fünf Schritte nach oben gelangen. Geht der Springer im ersten Zug zwei Schritte nach rechts, so muss er einen Schritt nach oben gehen. Im zweiten Zug kann er nicht zwei Schritte nach links, da er in den letzten zwei Zügen nicht fünf Schritte nach rechts gehen könnte. Er kann auch nicht einen Schritt nach links gehen, da er dann zwei Schritte nach oben ziehen und damit das Spielfeld verlassen würde.

Geht der Springer im zweiten Zug einen Schritt nach rechts, so verbleiben zwei Schritte nach rechts in den letzten beiden Zügen. Diese können jedoch nur durch jeweils einen Schritt nach rechts erreicht werden. Folglich geht der Springer dann jeweils $1, \pm 2, \pm 2, \pm 2$ Schritte nach oben. In den letzten drei Zügen könnte der Springer also nur ± 2 oder ± 6 Schritte nach oben gehen, aber nicht die benötigten vier.

Geht der Springer im zweiten Zug zwei Schritte nach rechts, so verbleibt ein Schritt nach rechts in den letzten beiden Zügen. Das ist jedoch nur möglich, wenn der Springer einmal zwei Schritte nach rechts und einmal einen Schritt nach links geht. Im dritten Zug kann der Springer jedoch nicht zwei Schritte nach rechts unternehmen ohne das Spielfeld zu verlassen. Der Springer geht also $2, 2, -1, 2$ Schritte nach rechts und $1, \pm 1, \pm 2, \pm 1$ Schritte nach oben. Um die fünf Schritte nach oben zu gehen, müssen die Vorzeichen alle positiv sein. Dies ist in der Tat ein Weg vom Start- ins Zielfeld.

c) Das Türmchen muss mindestens fünfmal nach rechts und fünfmal nach oben, daher sind mindestens zehn Züge nötig.

d) *Anzahl der Wege*: 126.

Notation: Für die Argumentation ist es günstig die Felder zu indizieren: $f_{i,j}$ sei das Feld in der i-ten Zeile von unten und der j-ten Spalte von links. Wir fangen mit der 0-ten Zeile und der 0-ten Spalte an, also ist das Startfeld $f_{0,0}$ und das Zielfeld $f_{5,5}$. Die Anzahl der zulässigen Wege für unsere Figur von $f_{0,0}$ nach $f_{i,j}$ sei $a_{i,j}$.

Begründung 1: Die wesentliche Beobachtung ist, dass jeder Weg von $f_{0,0}$ nach $f_{i+1,j+1}$ als vorletztes entweder das Feld $f_{i+1,j}$ oder das Feld $f_{i,j+1}$ besucht. Dies liefert eine disjunkte Zerlegung der Wege von $f_{0,0}$ nach $f_{i+1,j+1}$. Umgekehrt lässt sich jeder Weg von $f_{0,0}$ nach $f_{i+1,j}$ oder $f_{i,j+1}$ um einen Schritt auf das Feld $f_{i+1,j+1}$ verlängern. Wir erhalten somit, dass $a_{i,j}$ der Rekursion

$$a_{i+1,j+1} \;=\; a_{i+1,j} + a_{i,j+1},$$

genügt. Geeignete Anfangsbedingungen sind $a_{0,0} = 1$ und $a_{i,j} = 0$, wenn die Indizes $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ kein Feld des Brettes beschreiben. Die Rekursion erlaubt die Berechnung des Wertes $a_{i,j}$ für alle Felder, z.B. kann man zeilenweise von unten nach oben vorgehen. So erhält man $a_{5,5} = 126$ als Ergebnis.

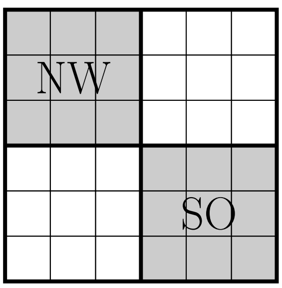
Begründung 2: Der Rechenaufwand der obigen Begründung lässt sich mit folgenden Überlegungen erheblich verringern: Wenn mit einem Feld $f_{i,j}$ auch alle Felder, die in dem Rechteck, das von $f_{0,0}$ und $f_{i,j}$ aufgespannt wird, zum Brett gehören (das sind die Felder $f_{x,y}$ mit $0 \le x \le i$ und $0 \le y \le j$), dann ist der Wert $a_{i,j}$ ein Eintrag aus dem Pascalschen Dreieck, d.h.

$$a_{i,j} \;=\; \binom{i+j}{i}.$$

Jeder Weg von $f_{0,0}$ nach $f_{5,5}$ läuft über genau eines der Felder $f_{0,5}$, $f_{1,4}$ oder $f_{2,3}$. Die Anzahl der Wege, die über $f_{1,4}$ laufen, erhält man als Produkt der Anzahl der Wege von $f_{0,0}$ nach $f_{1,4}$ und der Anzahl der Wege von $f_{1,4}$ nach $f_{5,5}$. Aus Symmetrie sind diese Anzahlen gleich, also gibt es $a_{1,4}^2$ Wege von $f_{0,0}$ nach $f_{5,5}$ über $f_{1,4}$. Genauso kann man für die Zwischenfelder $f_{0,5}$ und $f_{2,3}$ argumentieren. Die gesuchte Anzahl ist daher

$$a_{0,5}^2 + a_{1,4}^2 + a_{2,3}^2 = \binom{5}{0}^2 + \binom{5}{1}^2 + \binom{5}{2}^2 = 1^2 + 5^2 + 10^2 = 126.$$

Begründung 3: Noch kürzer geht es, wenn man sich das volle Brett mit sechs Zeilen und sechs Spalten vorstellt. Hier gibt es $\binom{5+5}{5} = 252$ Wege von $f_{0,0}$ nach $f_{5,5}$. Jeder dieser Wege benutzt entweder Felder im Gebiet NW oder im Gebiet SO (siehe Abbildung).



Vervollständigung des Spielfeldes.

Im Folgenden betrachten wir alle Indizes modulo 3 (beziehungsweise modulo n im Teil d)). Zunächst einige wichtige Vorüberlegungen:

- Da die Koeffizienten der Gleichung durch $(\cos(\alpha_i))^2$ gegeben sind, können wir die Winkel α_i stets bis auf Vielfache von π betrachten.
- Bezeichnet β_i den Innenwinkel des Dreiecks $\triangle A_1A_2A_3$ bei A_i, so gilt dann $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \beta_{i+1}$.
- Bezeichnen wir mit R den Umkreisradius des Dreiecks $\triangle A_1A_2A_3$, dann gilt nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz $\angle A_iMA_{i+1} = 2\beta_{i+2}$ auch, wenn M außerhalb des Dreiecks liegt. Daher gilt immer $F_i = \frac{R^2}{2}\sin(2\beta_{i+2})$.

a) Wir verwenden $F = F_1 + F_2 + F_3$, um die Gleichung $f_g(P) = F/2$ in die homogene Form

$$0 = \Big(\cos^2(\alpha_1) - \frac{1}{2}\Big)F_1 + \Big(\cos^2(\alpha_2) - \frac{1}{2}\Big)F_2 + \Big(\cos^2(\alpha_3) - \frac{1}{2}\Big)F_3 \tag{1}$$

zu bringen. In unserem Fall, also $P = M$, erhalten wir mithilfe von $1 = \sin^2(\alpha_i) + \cos^2(\alpha_i)$, des Cosinus-Additionstheorems und der letzten Vorüberlegung für jeden Summanden auf der rechten Seite

$$\Big(\cos^2(\alpha_i) - \frac{1}{2}\Big)F_i = \frac{\cos^2(\alpha_i) - \sin^2(\alpha_i)}{4}R^2\sin(2\beta_{i+2}) = \cos(2\alpha_i)\sin(2\beta_{i+2})\frac{R^2}{4}.$$

Benutzen wir die zweite Vorüberlegung, so folgt aus dem Sinus-Additionstheorem

$$\sin(2\beta_{i+2}) = \sin(2\alpha_{i+2} - 2\alpha_{i+1}) = \sin(2\alpha_{i+2})\cos(2\alpha_{i+1}) - \cos(2\alpha_{i+2})\sin(2\alpha_{i+1}).$$

Somit ist Gleichung (1) äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 = {} & \cos(2\alpha_1)\cos(2\alpha_2)\sin(2\alpha_3) - \cos(2\alpha_1)\cos(2\alpha_3)\sin(2\alpha_2) \\ & + \cos(2\alpha_2)\cos(2\alpha_3)\sin(2\alpha_1) - \cos(2\alpha_2)\cos(2\alpha_1)\sin(2\alpha_3) \\ & + \cos(2\alpha_3)\cos(2\alpha_1)\sin(2\alpha_2) - \cos(2\alpha_3)\cos(2\alpha_2)\sin(2\alpha_1). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist offenbar erfüllt. Somit haben wir $f_g(M) = F/2$ gezeigt.

b) Für eine gegebene Gerade g sind $(\cos(\alpha_i))^2$ Konstanten. Der Flächeninhalt F_i ist eine lineare Funktion in den Koordinaten von P: Wer die Darstellung des Flächeninhalts in kartesischen Koordinaten mittels des Betrags des Kreuzprodukts zweier aufspannender Vektoren oder mittels Determinante kennt, sieht das sehr leicht. Ansonsten kann der Flächeninhalt auch als halbes Produkt der Längen der gegebenen Grundseite a_{i-1} und der Höhe von P auf a_{i-1} berechnet werden. Die Länge der Höhe ist offenbar eine lineare Funktion in den Koordinaten von P (dies kann beispielsweise über ähnliche Dreiecke oder Rotation des Koordinatensystems eingesehen werden).

Folglich ist $f_g(P) = F/2$ eine lineare Gleichung in den Koordinaten von P. Der Lösungsraum ist somit die ganze Ebene, die leere Menge, oder eine Gerade. Schließen wir die ersten beiden Fälle aus, so ist die Aussage gezeigt.

Wäre der Lösungsraum die ganze Ebene, so würden die drei Eckpunkte A_i die Gleichung erfüllen, also $f_g(A_i) = F/2$. Diese Gleichungen vereinfachten sich dann zu $(\cos(\alpha_{i+1}))^2F = F/2$, was äquivalent zu $\alpha_{i+1} = 45°$ oder $\alpha_{i+1} = 135°$ wäre. Wegen $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \beta_{i+1}$ würde $\beta_{i+1} = 90°$ folgen. Kein Dreieck kann aber drei rechte Winkel haben, Widerspruch!

Der Lösungsraum kann aber auch nicht leer sein, da wir in Aufgabenteil a) gezeigt haben, dass der Umkreismittelpunkt die Gleichung für jede Gerade g erfüllt.

c) In Aufgabenteil b) haben wir gesehen, dass für eine gegebene Gerade g die Gleichung $f_g(P) = F/2$ eine Gerade beschreibt. Aus Aufgabenteil a) wissen wir, dass der Umkreismittelpunkt M immer auf dieser Lösungsgeraden liegt. Gäbe es einen weiteren Punkt $N \neq M$, der $f_g(N) = F/2$ für alle Geraden g erfüllt, so wäre die Gerade durch M und N immer die Lösungmenge zu der Gleichung $f_g(P) = F/2$.

In Aufgabenteil b) haben wir bereits gezeigt, dass für eine Gerade g genau dann $f_g(A_i) = \frac{F}{2}$ erfüllt ist, wenn $\alpha_{i+1} = 45°$ oder $\alpha_{i+1} = 135°$ gilt. Solche Gerade existieren natürlich. Folglich müssten die Eckpunkte des Dreiecks auf der Geraden durch M und N liegen, Widerspruch!

d) *Begründung 1*: Ein konvexes Polygon lässt sich entlang von Diagonalen in Dreiecke zerlegen. Alle Dreiecke haben ebenfalls M als Umkreismittelpunkt. Daher gilt für jedes Dreieck $\triangle A_iA_jA_k$ und jede Gerade g nach Teil a) die entsprechende Gleichung

$$(\cos(\alpha_{i,j}))^2 F_i^{ijk} + (\cos(\alpha_{j,k}))^2 F_j^{ijk} + (\cos(\alpha_{k,i}))^2 F_k^{ijk} \;=\; \frac{F^{ijk}}{2},$$

wobei F^{ijk} den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A_iA_jA_k$, F_i^{ijk}, F_j^{ijk}, F_k^{ijk} die orientierten Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle A_iA_jM$, $\triangle A_jA_kM$, $\triangle A_kA_iM$ und $\alpha_{i,j}$ den entsprechenden Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Kante oder Diagonale A_iA_j bezeichnet.

Summieren wir nun diese Gleichungen für alle Dreiecke der Zerlegung von $A_1A_2\ldots A_n$ auf, so erhalten wir auf der rechten Seite den halben Flächeninhalt $F/2$ des Polygons. Auf der linken Seite gilt für jede Kante A_iA_{i+1} offensichtlich $\alpha_{i,i+1} = \alpha_i$ und $F_i^{i(i+1)j} = F_i$. Die entsprechenden Ausdrücke summieren sich also genau zu

$$(\cos(\alpha_1))^2 F_1 + (\cos(\alpha_2))^2 F_2 + \ldots + (\cos(\alpha_n))^2 F_n.$$

Es verbleiben die Ausdrücke $(\cos(\alpha_{i,j}))^2 F_i^{ijk}$ für eine echte Diagonale A_iA_j. Jede solche Diagonale kommt aber in zwei Dreiecken $\triangle A_iA_jA_k$ und $\triangle A_jA_iA_{k'}$ vor, zu beachten ist die unterschiedliche Orientierung. Der Winkel $\alpha_{i,j}$ ist in beiden Fällen gleich, die Dreiecke $\triangle A_iA_jM$ und $\triangle A_jA_iM$ sind aber verschieden orientiert, sodass $F_i^{ijk} = -F_i^{jik'}$ und daher

$$(\cos(\alpha_{i,j}))^2 F_i^{ijk} + (\cos(\alpha_{i,j}))^2 F_i^{jik'} = 0$$

gilt. Damit heben sich die entsprechenden Ausdrücke auf und wir erhalten für alle Geraden g die zu zeigende Gleichung

$$(\cos(\alpha_1))^2 F_1 + (\cos(\alpha_2))^2 F_2 + \ldots + (\cos(\alpha_n))^2 F_n = \frac{F}{2}.$$

Begründung 2: Die obige Argumentation lässt sich mithilfe einer vollständigen Induktion über die Anzahl n der Ecken verkürzen. Der Fall $n = 3$ ist Aufgabenteil a). Haben wir nun ein Polygon $A_1A_2\ldots A_n$ mit $n > 3$, so zerlegen wir es in das Dreieck $A_1A_2A_3$ und das $(n-1)$-Eck $A_1A_3\ldots A_n$. Nach Induktionsannahme gilt die Formel für diese beiden Polygone. Addieren wir beide Gleichungen, so erhalten wir auf der rechten Seite den Fächeninhalt von $A_1A_2\ldots A_n$. Auf der linken Seite erhalten wir zwei zusätzliche Summanden: Einen für die Kante A_3A_1 im Dreieck $A_1A_2A_3$ und einen weiteren für die Kante A_1A_3 im Polygon $A_1A_3\ldots A_n$. Diese Kanten unterscheiden sich nur in ihrer Orientierung und somit heben sich die korrespondierenden Terme gegenseitig auf (siehe erste Begründung).