Analysis mit hyperreellen Zahlen

oder

Nonstandardanalysis

oder

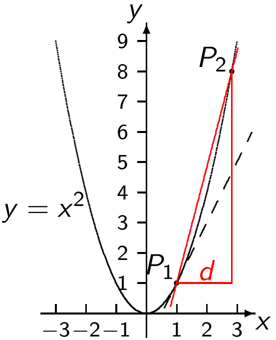
Infinitesimalrechnung

Peter Baumann

Berlin

30. April 2022

Häufiges Einstiegsbeispiel



$$m = \frac{(1+d)^2 - 1}{d} = \ldots = 2 + d$$

Schülerin: „Der Fehler ist am kleinsten, wenn der Abstand d unendlich klein aber nicht 0 ist, etwa so:

0,0. . . unendlich viele Nullen . . . und dann eine Eins.“

Gibt es überhaupt solch eine unendlich kleine Zahl? Was wäre, wenn wir sie hätten?

Eine neue Zahl . . .

Nennen wir diese unendlich kleine Zahl δ.

- Sie kann nicht reell sein, denn bei reellen Zahlen folgen hinter dem Komma zunächst höchstens endlich viele Nullen (außer bei 0).
- Da sie sehr nützlich ist, soll δ zur Menge $\mathbb{R}$ hinzugefügt werden.
- Und mit δ soll genauso genauso gerechnet werden können wie mit den reellen Zahlen.
  Das bedeutet . . .

... und was daraus folgt.

- Man kann sie zu jeder reellen Zahl r addieren: $\boldsymbol{r} + \delta$.
- Es gibt ihre Produkte mit reellen Zahlen: $\boldsymbol{r} \cdot \delta$.
- Und es gibt sämtliche anderen rechnerischen Kombinationen, die auch mit reellen Zahlen r, s usw. möglich sind, z.B. $r(\delta - 15)$, $\frac{t-\delta}{3+r\cdot s}$, auch Potenzen wie $\delta^{\boldsymbol{r}}$.
- Es gibt ihre additive Gegenzahl $-\delta$ und ihre multiplikative Kehrzahl $\boldsymbol{\frac{1}{\delta}} = \Delta$.

  Δ muss unendlich groß sein!

Aber was heißt *unendlich groß*?

Über das Unendliche

Es gibt verschiedene Vorstellungen davon, was unendlich ist.

- Die Menge $\mathbb{R}$ geht bis ins Unendliche, aber keine reelle Zahl ist unendlich groß.
  $\mathbb{R}$ ist potentiell unendlich, denn man kann zu immer größeren reellen Zahlen weitergehen, ohne je an ein Ende zu kommen.
- Die Zahl Δ ist aktual unendlich. Sie ist „wirklich“ unendlich groß.

Aber wo beginnt das Unendliche?

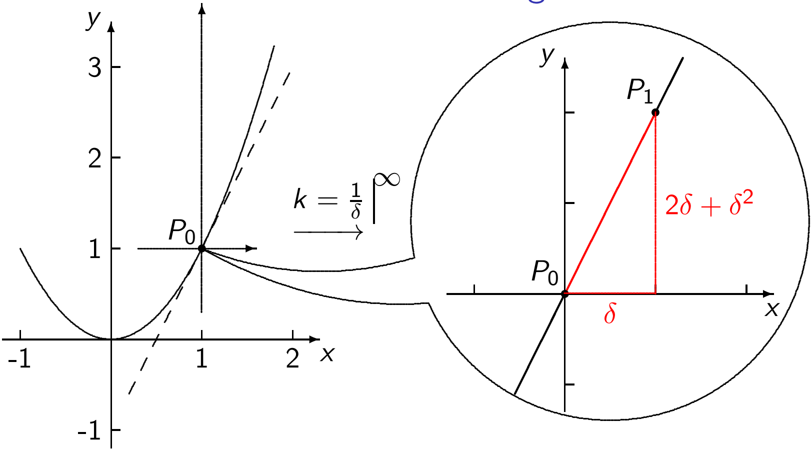
Übergang endlich $\longleftrightarrow$ unendlich

Es ist nicht angebbar, wo dieser Übergang stattfindet,

- denn nimmt man an, r sei die größte endliche Zahl,
- dann kann man immer z. B. 1 addieren, aber $r + 1$ wäre immer noch eine endliche Zahl.

Ganz entsprechend kann man auch nicht angeben, welche die kleinste unendliche Zahl ist.

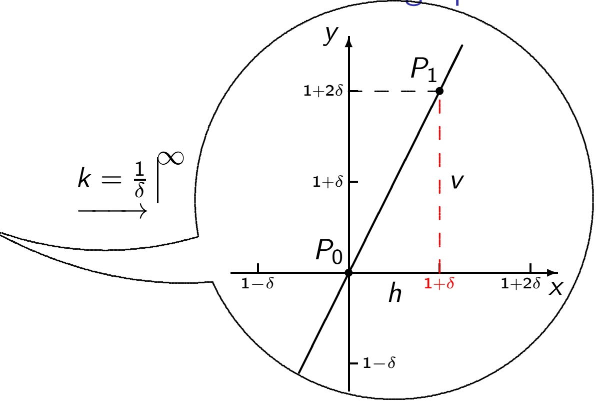
Infinite Streckung



$P_0(1\,;\,1)$, $P_1(1+\delta\,;\,(1+\delta)^2)$ $\qquad h = \delta,\ v = 2\delta + \delta^2$

$m = \dfrac{v}{h} = \dfrac{2\delta + \delta^2}{\delta} = 2 + \delta,$ $\qquad \mathrm{RT}(m) = 2$

Funktionsgraph und Tangente



für $x = 1 + \delta$ gilt:

Parabel:
$y = 1 + 2\delta + \delta^2$

Gerade mit $m = 2$:
$y = 1 + 2\delta$

Unterschied: δ^2
Hier nicht darstellbar!

Bei infiniter Vergrößerung am Berührpunkt sind Funktionsgraph und Tangente graphisch nicht mehr unterscheidbar, sondern fallen zusammen.

Axiome der Erweiterung von $\mathbb{R}$ nach ${}^\star\mathbb{R}$

I Erweiterungsprinzip

- $\mathbb{R}$ ist eine Untermenge von ${}^\star\mathbb{R}$, die Ordnungsrelation $x < y$ in $\mathbb{R}$ ist eine Untermenge der Ordnungsrelation in ${}^\star\mathbb{R}$.
- Es gibt eine hyperreelle Zahl, die größer als null ist, aber kleiner als jede positive reelle Zahl.
- Zu jeder reellen Funktion f gibt es die dazugehörige hyperreell erweiterte Funktion ${}^\star f$ mit derselben Anzahl Variabler.

II Transferprinzip

- Jede reelle Aussage, die für eine oder mehrere reelle Funktionen gilt, gilt auch für die hyperreelle Erweiterung dieser Funktionen.

III Standardteilprinzip

- Jede finite hyperreelle Zahl ist infinitesimal benachbart zu genau einer reellen Zahl.

Damit ist der Körper $\mathbb{R}$ zum Körper ${}^\star\mathbb{R}$ der hyperreellen Zahlen erweitert.

Hyperreelle Zahltypen

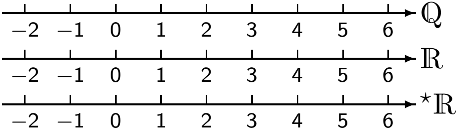
Man unterscheidet verschiedene Typen hyperreeller Zahlen:

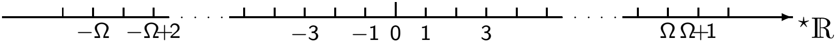
- **Infinite Zahlen** (A, B, Γ, $\ldots$, Ω) besitzen einen unendlich großen Betrag.
- **Finite Zahlen** sind alle Zahlen, die nicht infinit sind. Dazu gehören insbesondere
  - **reelle Zahlen**,
  - **infinitesimale Zahlen** (α, β, γ, $\ldots$, ω) mit einem unendlich kleinen Betrag (kleiner als jede positive reelle Zahl). 0 ist die einzige reelle Zahl, die auch infinitesimal ist.

Mit der Erweiterung nach ${}^\star\mathbb{R}$ erfahren auch die Teilmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ eigene Erweiterungen zu ${}^\star\mathbb{N}$, ${}^\star\mathbb{Z}$ und ${}^\star\mathbb{Q}$.
Insbesondere bleibt die Eigenschaft, in ${}^\star\mathbb{N}$ zählen zu können, erhalten.

$^\star\mathbb{R}$ und die Zahlengerade

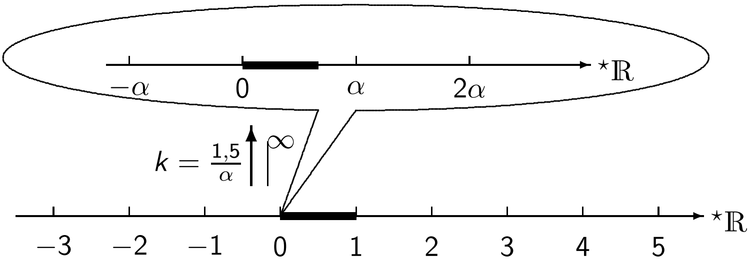
Nur an ihrer Bezeichnung ist erkennbar, welche Menge eine Zahlengerade darstellt.



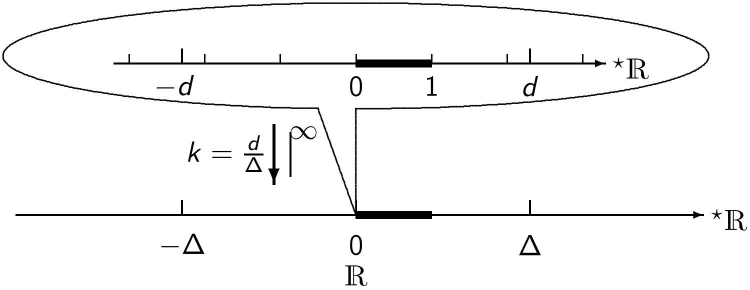


Wo der Übergang endlich – unendlich stattfindet, ist nicht angebbar.

Infinitesimale Zahlen auf der Zahlengeraden



Infinite Zahlen auf der Zahlengeraden



Rechnen mit hyperreellen Zahlen

- Beim Rechnen mit hyperreellen Zahlen ist nicht immer das konkrete Rechenergebnis von Interesse.
- Wichtig ist dagegen häufig die Abschätzung, ob ein Term eine finite, eine reelle, eine infinitesimale oder eine infinite Zahl beschreibt.

Addition

$+$	β	y	g	B
α				
x				
f				
A				

$+$	β	y	g	B
α	γ	h	h	Γ
x	h	z	h	Γ
f	h	h	h	Γ
A	Γ	Γ	Γ	?

Subtraktion

$-$	β	y	g	B
α				
x				
f				
A				

$-$	β	y	g	B
α	γ	h	h	Γ
x	h	z	h	Γ
f	h	h	h	Γ
A	Γ	Γ	Γ	?

Multiplikation

$\cdot$	β	y	g	B
α				
x				
f				
A				

$\cdot$	β	y	g	B
α	γ	γ	γ	?
x	γ	z	h	Γ
f	γ	h	h	?
A	?	Γ	?	Γ

Division

:	$\beta \neq 0$	$y \neq 0$	$g \neq 0$	B
α				
x				
f				
A				

:	$\beta \neq 0$	$y \neq 0$	$g \neq 0$	B
α	?	γ	?	γ
x	Γ	z	h	γ
f	?	h	?	γ
A	Γ	Γ	Γ	?

Reeller (Standard-) und infinitesimaler Teil

Jede finite hyperreelle Zahl kann man eindeutig zerlegen in einen reellen Teil (Standardteil) und einen infinitesimalen Teil. Annahme, es gäbe für eine finite Zahl f zwei Zerlegungen $r + \alpha$ und $s + \beta$, dann gilt

$$\begin{aligned} r + \alpha &= s + \beta \\ r - s &= \beta - \alpha \\ \text{reell} &= \text{infinitesimal} \end{aligned}$$

0 ist die einzige reelle Zahl, die auch infinitesimal ist, die Zerlegung ist eindeutig.
$r = \mathrm{RT}(f)$ ist der reelle Teil (Standardteil) der hyperreellen Zahl f, er ist mit den Grundrechenarten verträglich.

Reeller Teil – Verträglichkeit mit den Grundrechenarten

Beispiel Addition:

Gegeben: Zwei finite Zahlen $a = r + \alpha$ und $b = s + \beta$

Es gilt also $r = \mathrm{RT}(a)$ und $s = \mathrm{RT}(b)$

Für ihre Summe $a + b$ gilt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{RT}(a+b) &= \mathrm{RT}((r+\alpha)+(s+\beta)) = \mathrm{RT}(r+s+\alpha+\beta)\\ &= r+s = \mathrm{RT}(a)+\mathrm{RT}(b)\ .\end{aligned}$$

Infinitesimale Nachbarschaft — Das Zeichen $\simeq$

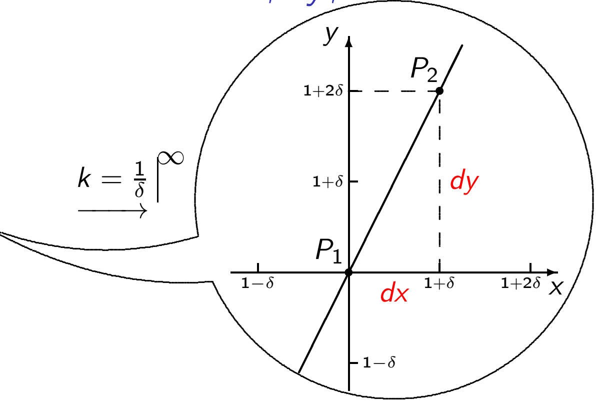
$m = \dfrac{v}{h}$ Steigung zwischen infinitesimal benachbarten Punkten,

$f'(x) \simeq \dfrac{v}{h}$ Steigung des reellen Funktionsgraphen.

Also:

$$m = \frac{2\alpha + \alpha^2}{\alpha} = 2 + \alpha \simeq 2 = f'(1)$$

dx, dy, ... als Infinitesimalzahlen



$$dy = y_2 - y_1$$

$$dx = x_2 - x_1$$

$$f'(x) \simeq m = \frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Im Gegensatz zur Standardanalysis gilt hier:

***dx*, *dy* usw. sind infinitesimale Zahlen, mit denen gerechnet werden kann.**

Ableitung der Quadratfunktion

Allgemeiner Punkt: $P_1(x\,;\,x^2)$
Infinitesimal benachbarter Punkt: $P_2(x+dx\,;\,(x+dx)^2)$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^2 - x^2}{(x+dx)-x} = \frac{2\cdot x\cdot dx + (dx)^2}{dx} = 2x + dx$$

$$f'(x) = \mathrm{RT}(m) = \mathrm{RT}(2x+dx) = 2x \quad \textbf{Ableitung!}$$

Ableitung anderer Potenzfunktionen

Beispiel Kubikfunktion:
Punkte $P_1(x\,;\,x^3)$ und $P_2(x+dx\,;\,(x+dx)^3)$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^3 - x^3}{(x+dx)-x}$$

$$= \frac{3x^2 \cdot dx + 3x \cdot (dx)^2 + (dx)^3}{dx} = 3x^2 + 3x \cdot dx + (dx)^2$$

$$p_3'(x) = \mathrm{RT}(m) = \mathrm{RT}(3x^2 + 3x\,dx + (dx)^2) = 3x^2$$

Beispiel Potenzfunktion 4. Grades:
Punkte $P_1(x\,;\,x^4)$ und $P_2(x+dx\,;\,(x+dx)^4)$

$$\begin{aligned}
m = \frac{dy}{dx} &= \frac{(x+dx)^4 - x^4}{(x+dx)-x} \\
&= \frac{4x^3 \cdot dx + 6x^2(dx)^2 + 4x(dx)^3 + (dx)^4}{dx} \\
&= 4x^3 + 6x^2\,dx + 4x(dx)^2 + (dx)^3
\end{aligned}$$

$$p_4'(x) = \mathrm{RT}(m) = \mathrm{RT}(4x^3 + 6x^2(dx) + 4x(dx)^2 + (dx)^3) = 4x^3$$

Berechnung der Potenzregel

Punkte $P_1(x\,;\,x^n)$ und $P_2(x+dx\,;\,(x+dx)^n)$

$$\begin{aligned} m &= \frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)^n - x^n}{(x+dx)-x} \\ &= \frac{n\cdot x^{n-1}\cdot dx + \text{Summanden mit mind. } (dx)^2}{dx} \\ &= nx^{n-1} + \text{Summanden mit mind. } dx \end{aligned}$$

$$p_n'(x) = \mathrm{RT}(m) = \mathrm{RT}(nx^{n-1} + \text{Summanden mit mind. } dx) = nx^{n-1}$$

Summenregel

Es sei $s(x) = f_1(x) + f_2(x)$

$$
\begin{aligned}
m = \frac{dy}{dx} &= \frac{s(x+dx) - s(x)}{(x+dx) - x} \\
&= \frac{f_1(x+dx) + f_2(x+dx) - (f_1(x) + f_2(x))}{dx} \\
&= \frac{f_1(x+dx) - f_1(x)}{dx} + \frac{f_2(x+dx) - f_2(x)}{dx}
\end{aligned}
$$

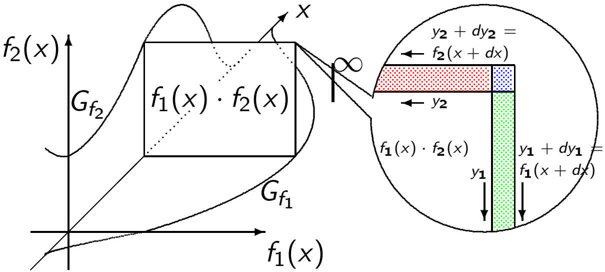
$$s'(x) = \mathrm{RT}(m) = f_1'(x) + f_2'(x)$$

Zahlenfaktorregel

Es sei $z(x) = k \cdot f(x)$, $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} m = \frac{dy}{dx} &= \frac{z(x+dx) - z(x)}{(x+dx) - x} = \frac{k \cdot f(x+dx) - k \cdot f(x)}{dx} \\ &= k \cdot \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \\ z'(x) &= \mathrm{RT}(m) = k \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Produktregel



relative Veränderung: $\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \frac{f_1(x+dx)\cdot f_2(x+dx) - f_1(x)\cdot f_2(x)}{dx}$

$$= \frac{f_1(x+dx)-f_1(x)}{dx} \cdot f_2(x) + \frac{f_2(x+dx)-f_2(x)}{dx} \cdot f_1(x) + \frac{(f_1(x+dx)-f_1(x))}{dx} \cdot (f_2(x+dx) - f_2(x))$$

Reeller Teil: $(f_1 \cdot f_2)'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_2'(x) \cdot f_1(x) + 0$

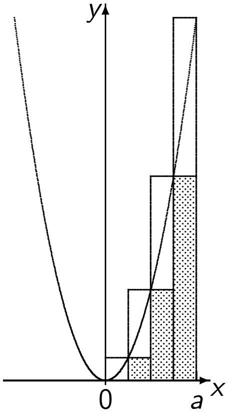
Kettenregel

Es sei $f = g \circ h$ mit $f(x) = y = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(z)$, g und h differenzierbar.
Änderung von x um infinitesimales $dx \neq 0$ ändert z um infinitesimales dz.
$h'(x) = \mathrm{RT}(\frac{dz}{dx})$ $\quad g'(z) = \mathrm{RT}(\frac{dy}{dz})$, gesucht: $f'(x) = \mathrm{RT}(\frac{dy}{dx})$

$$\begin{aligned} \mathrm{RT}(\frac{dy}{dx}) &= \mathrm{RT}(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}) = \mathrm{RT}(\frac{dy}{dz}) \cdot \mathrm{RT}(\frac{dz}{dx}) \\ &= g'(z) \cdot h'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x), \ \underline{\text{falls } dz \neq 0} \end{aligned}$$

Falls $dz = h'(x) = 0$, dann ist $g(z) = g(z + dz)$, also ist auch $g'(z) = dy = 0$.
Also ist die Ableitung der Verkettung auch in der Form $0 = g'(h(x)) \cdot 0$ richtig.

Fläche unter einer Parabel



$$A_{4_u} = \frac{1}{4}a((\tfrac{1}{4}a)^2 + (\tfrac{2}{4}a)^2 + (\tfrac{3}{4}a)^2)$$
$$= \frac{1}{4^3}a^3(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{1}{4^3}a^3 \sum_{i=1}^{3} i^2$$

$$A_{4_o} = \frac{1}{4}a((\tfrac{1}{4}a)^2 + (\tfrac{2}{4}a)^2 + (\tfrac{3}{4}a)^2 + (\tfrac{4}{4}a)^2)$$
$$= \frac{1}{4^3}a^3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = \frac{1}{4^3}a^3 \sum_{i=1}^{4} i^2$$

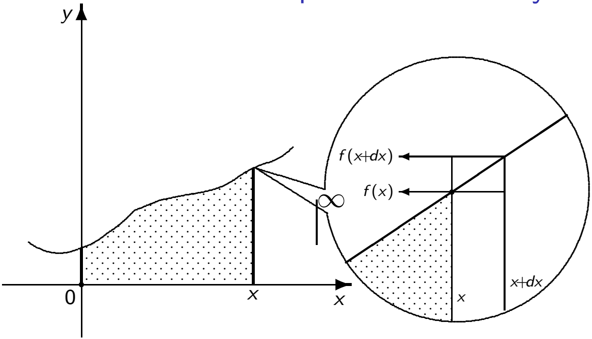
$$A_{100_u} = \frac{1}{100}a((\frac{1}{100}a)^2 + (\frac{2}{100}a)^2 + (\frac{3}{100}a)^2 + \ldots + (\frac{99}{100}a)^2 = \frac{1}{100^3}a^3\sum_{i=1}^{99} i^2$$

$$A_{100_o} = \frac{1}{100}a((\frac{1}{100}a)^2 + (\frac{2}{100}a)^2 + (\frac{3}{100}a)^2 + \ldots + (\frac{100}{100}a)^2 = \frac{1}{100^3}a^3\sum_{i=1}^{100} i^2$$

$$A_{\mathrm{N}_u} = \frac{1}{\mathrm{N}^3}a^3\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1} i^2 = \frac{1}{\mathrm{N}^3}a^3\frac{(\mathrm{N}-1)\mathrm{N}(2\mathrm{N}-1)}{6} = \frac{1}{6}a^3\frac{(\mathrm{N}-1)\mathrm{N}(2\mathrm{N}-1)}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{N}\cdot\mathrm{N}} \simeq \frac{1}{3}a^3$$

$$A_{\mathrm{N}_o} = \frac{1}{\mathrm{N}^3}a^3\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} i^2 = \frac{1}{\mathrm{N}^3}a^3\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)(2\mathrm{N}+1)}{6} = \frac{1}{6}a^3\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)(2\mathrm{N}+1)}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{N}\cdot\mathrm{N}} \simeq \frac{1}{3}a^3$$

Hauptsatz der Analysis



$$f(x) \cdot dx \leq F(x+dx) - F(x) \leq f(x+dx) \cdot dx\,.$$

$$f(x) \leq \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} \leq f(x+dx)\,.$$

Für den reellen Teil gilt die Gleichheit: $f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$.

Folgen als Zahlen

Jede Folge reeller Zahlen ist die Beschreibung einer hyperreellen Zahl.

Zur Erinnerung: Jede Cauchy-Folge rationaler Zahlen ist die Beschreibung einer reellen Zahl.

Mit hyperreellen Zahlen wird gerechnet, indem man die entsprechende Operation mit den reellen Folgengliedern vornimmt.

Damit baut das Rechnen in ${}^{\star}\mathbb{R}$ auf dem Rechnen in $\mathbb{R}$ auf.

Folgen und Zahltypen

- Konstante Folgen beschreiben die ursprünglichen reellen Zahlen (Einbettung von $\mathbb{R}$).
- Konvergente Folgen beschreiben finite, nicht reelle, Zahlen.
- Nullfolgen beschreiben infinitesimale Zahlen.
- Divergente Folgen beschreiben infinite Zahlen.

Äquivalenzklassen

Zwei Folgen beschreiben dieselbe Zahl, wenn sie in genügend vielen Gliedern übereinstimmen.

D.h.: Endlich viele Abweichungen haben keine Auswirkungen. (Das ist z.B. wichtig, wenn bei der Division in der Divisorfolge Nullen auftreten.)

Das reicht aber noch nicht aus, denn . . .

Unendlich viel Ungenügendes

Auch Folgen wie

$$a = (0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; \ldots) \qquad \text{und} \qquad b = (1; 0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; \ldots)$$

beschreiben hyperreelle Zahlen. Das bedeutet

$$a+b = (1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; \ldots) \quad \text{und} \quad a \cdot b = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; \ldots)$$

und führt auf die Frage

$$a = 0 \wedge b = 1 \qquad \text{oder} \qquad a = 1 \wedge b = 0\ ?$$

Es ist zu festzulegen, ob die geraden oder die ungeraden Folgenglieder *genügend viele* sein sollen. Derartige Filter sind in weiteren Stufen hinzuzufügen. Nach dem Zornschen Lemma ist ein derartiges Vorgehen bis zu einem ultimativen Filter möglich.

Und was sagt der Rahmenlehrplan?

- Exakte Grenzwertdefinition wird nicht mehr verlangt.

  Früher: „Für einfache konvergente Zahlenfolgen den Grenzwert erkennen und durch Anwendung der Grenzwertdefinition nachweisen können, daß die erkannte Zahl tatsächlich der Grenzwert ist."
- „... inhaltlich anschaulicher Grenzwertbegriff ..."
- „... Die Methoden der Infinitesimalrechnung werden weiterentwickelt, ..."
- „... Flächenbestimmung als Grenzprozess einer Ausschöpfung mit infinitesimalen Flächenstücken (z. B. durch Unter- und Obersummen). ..."
- „... Im Leistungskursfach wird der Hauptsatz geometrisch-anschaulich bewiesen. ..."

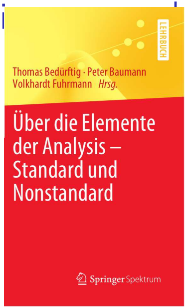
Zu Lösungsvorgaben bei Abituraufgaben: Gleichwertige Lösungen, die nicht in den amtlichen Lösungen dargestellt sind, sollen entsprechend bewertet werden.

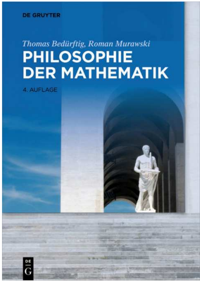
Li In


Peter Baumann, Thomas Bedürftig, Volkhardt Fuhrmann (Hrsg.)

dx, dy – Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen.

Eine Handreichung.





dx, *dy* – Einstieg in die Analysis mit infinitesimalen Zahlen, Handreichung für Lehrkräfte,

Bedürftig, Baumann, Fuhrmann: Über die Elemente der Analysis

Baumann, Kirski: Infinitesimalrechnung

Bedürftig, Murawski: Philosophie der Mathematik

kostenloser Download bei **www.nichtstandard.de**